

平均分散モデルの特徴と不確実性に関する考察

— 数理モデルと Microsoft Excel 活用によるデータ分析 —*

中西 真悟 **

情報センター

(2014 年9 月 30 日受理)

Characteristics and Uncertainties of Mean-Variance Model

— Mathematical Modeling and Data Analysis Using Microsoft Excel —

by

Shingo NAKANISHI

Computing Center

Abstract

We focus on mathematical modeling of mean-variance models in modern portfolio theory for finance. First, we can review mathematical modeling and these characteristics of mean-variance models. Second, we can perform data analysis of the top 10 ratings of Sharpe ratios for 20 years from January 1990 to December 2009. These data in the database shown in a paper titled “Development of local database for obtainable data of stock prices from website and its applications of Mean Variance Model and Capital Asset Pricing Model” has about 470,000 stock closing prices downloaded from Yahoo! Finance Japan. At the same time, we can investigate various characteristics and uncertainties of statistics, time series, and comparisons of both arithmetic mean and logarithmic mean. Furthermore, we can consider the relationship of simultaneous distributions based on mean-variance models.

キーワード ; 平均分散モデル, 最適ポートフォリオ理論, シャープ・レシオ, 資本市場線, 同時分布, 高次統計量, 時系列解析, Excel統計解析

Keyword ; Mean-Variance Model, Optimal Portfolio Theory, Sharpe Ratio, Capital Market Line (CML), Simultaneous Distribution, High-Order Statistics, Time Series Analysis, Excel Statistical Analysis

* 2013 年日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会で発表(2013 年 3 月 6 日, 東京大学)

** 発表時は大阪工業大学工学部技術マネジメント学科に所属

1. 緒 論

平均分散モデルは現代ポートフォリオ理論³⁹⁾もしくはアセット・アロケーション⁴⁰⁾の分散投資の観点から最適資産配分⁴¹⁾による資産運用の中心的役割を果たし、投資意思決定において極めて重要なモデルである³⁹⁾⁻⁴¹⁾。また、このため、平均分散モデル⁹⁾⁻¹¹⁾は平均分散分析¹³⁾²⁶⁾、平均分散ポートフォリオ⁶⁾⁷⁾、ポートフォリオ理論¹⁸⁾³⁹⁾、ポートフォリオ分析¹⁴⁾、ポートフォリオモデル¹⁶⁾、マルコビッツモデル⁸⁾、平均分散アプローチ⁴¹⁾、平均分散法⁴⁰⁾など多くの名称としても親しまれ用いられている。そこで、複数の証券に投資したときの資産構成をポートフォリオと呼び³⁹⁾、本研究での投資比率に関する表記は、ポートフォリオとして表記している。また、手法やモデリングについて基本的には平均分散モデルと表記して、数理モデルのレビューとデータ分析を実施している。

一方で、ビッグデータなどデータ分析の注目度とその活用目的について重要度が増している²⁹⁾。本研究の前報¹⁾「インターネットに公開される株価情報を利用したデータベースの開発とその活用 -平均分散モデルと資本資産価格モデルへの応用-」でもYahoo!ファイナンス⁴⁾からデータをダウンロードしてデータベースを構築し¹⁾、1990年1月から2009年12月までの20年間の長期投資²⁾や安全資産利子率には長期国債利回り³⁾を用いたケーススタディとして平均分散モデルのデータ分析を行っている。

その後、日本銀行の政策変更や東京オリンピック開催決定とリーマンショック後の悲観的な相場から、楽観的な株価上昇機運が高まっている可能性があるため、直近を含むデータ分析を避け、前報と同期間のデータ分析を行い、より詳細に平均分散モデルの考察を試みている。

このため、下記のとおり

- ・Excel活用方法における提案
- ・平均分散モデルの数理的傾向に関するレビュー
- ・計量期間中のパフォーマンス評価
- ・算術平均と対数平均モデルの対比
- ・計量期間の統計量の分析
- ・計量期間の時系列の分析
- ・同時分布としての分析

について考察を行っている。また、図1に示すとおり活用するデータは、前報¹⁾のデータベースに含まれる東証株価2153証券の株価上昇率上位50証券の

うち、茶色実線で描かれるシャープ・レシオの上位10証券によるポートフォリオを用いてデータ分析を進める。

以上をもとに、平均分散モデルの理論の整合性や不確実性を再考した後、計量期間のデータ分析で明らかになったことをまとめる。

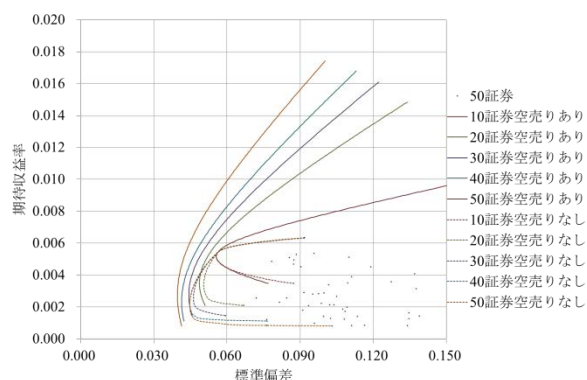


図1 1990年1月から2009年12月までのシャープ・レシオ昇順による国内株式上位50証券の平均分散モデルの視覚化¹⁾

Fig.1 Visualizations of mean-variance models of the top 50 ratings of securities by ascending order of Sharpe ratios from January 1990 to December 2009¹⁾

1.1 本研究のExcel活用コンセプト

加えて、本研究の着眼点は、前報¹⁾と同様にファイナンス教育へのデータベース活用とITリテラシーとしてのデータ分析を容易に行えることである¹⁾¹⁵⁾⁻¹⁹⁾³⁶⁻³⁸⁾。

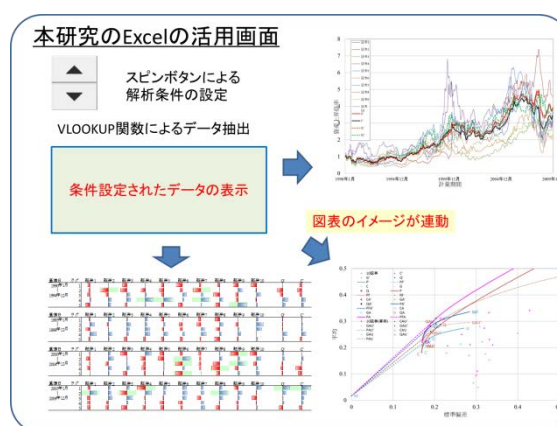


図2 本研究でExcel活用概念図

Fig.2 Concept diagram by using Excel in this study

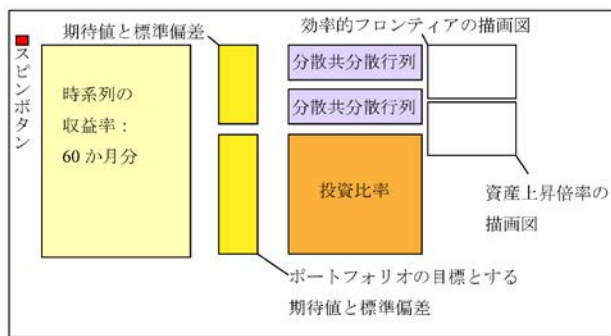
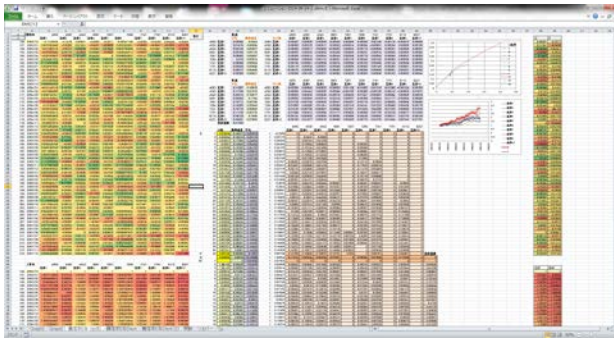


図 3 本研究で活用した Excel 作業画面インターフェイス(その 1)

Fig.3 User interfaces by Excel worksheets in this study (Example 1)

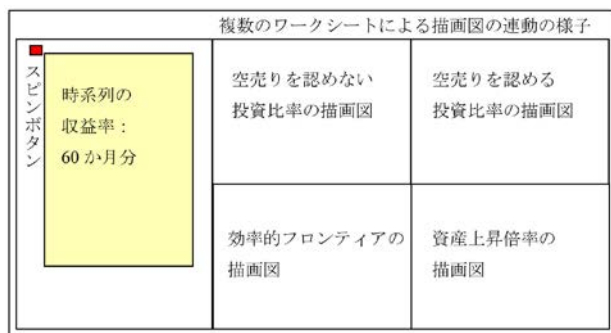
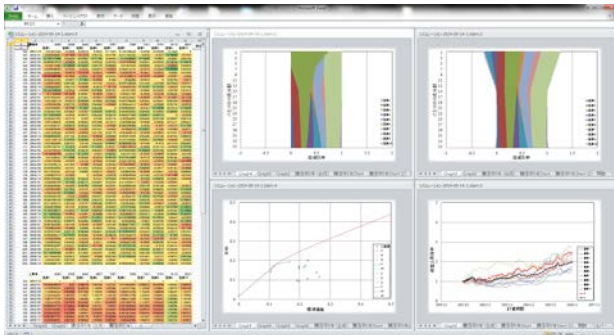


図 4 本研究で活用した Excel 作業画面インターフェイス(その 2)

Fig.4 User interfaces by Excel worksheets in this study (Example 2)

したがって、図 2 の概念図に示すように効果的に Excel を利用しながら研究ならびに教育活用を実施している。Excel 関数の使い方の工夫や条件設定のためにスピンボタンと標準関数の VLOOKUP 関数の活用で従来よりも解析や感度分析が効果的に実施できる。具体的には、図 3 と図 4 に示すように条件設定されたデータを画面に再表示し、これに連動する図表が変化することにより、特性値の傾向を調査することができる。また、本研究の研究領域から外れるが、この活用方法は、Excel によるモデルの可視化(たとえば、本学情報センターが開講する科目でサイクロイド、複素数の四則演算のガウス平面上での視覚化、楕円の変形や回転、三角関数や指数関数の変化などを実施)に有効である。ファイナンスの文献では、VBA(Visual Basic Application)や Cell に直接値入力し分析する例題が多く、ボタンやスピンボタン活用はこれらのコンテンツの可視化にも役立つはずである。

ところで、本研究のスピンボタン活用は石野のアイデア³⁸⁾の拡張である。すなわち、多くのファイナンスの Excel 活用¹⁵⁻¹⁹⁾³⁶⁻³⁸⁾の中でも、石野による「道具としてのファイナンス」³⁸⁾で扱う相関係数の大きさと効率的フロンティアの視覚化のためのスピンボタン活用実施は、分散投資とリスク低減を可視化できる魅力的な手段である。本研究でもこの方法を積極的に導入して、計量期間の設定などにスピンボタンを活用しながら、Excel を一枚のワークシート上にデザインしたユーザインタフェース(図 3)として、もしくは画面分割により多数の図表を同時に描画(図 4)して連動の様子がわかるようにシステムを作成している。作成したシステムのスピンボタンを活用して計量期間を変更したとき、数値によるセルの色の変化や図表の変化は、アニメーションのように動きその特性や影響を容易に確認できる。このように視覚的かつ効果的に調査できることは大変有益である。

また、本研究では標本数で割る場合の歪度や超過尖度の計算方法や自己共分散について、標準関数の SUMPRODUCT 関数を活用したユーザ定義の表記法を示している。主として統計解析あるいは時系列解析と Excel 操作方法に関する文献の調査を試みたが、おそらく Excel の活用においてあまり知られていない表記法だと思われる。このためファイナンスの IT

リテラシー向上や Excel 統計解析の効果的な活用方法として本文中に提案している。

2. モデリングのための統計量の表記方法

2.1 平均の表記

時点 t での証券 $i (= 1, \dots, n)$ のネットの資産収益率(騰落率)は

$$R_{it} = \frac{S_{it} + D_{it} - S_{it-1}}{S_{it-1}} = \frac{S_{it} + D_{it}}{S_{it-1}} - 1 \quad (1)$$

である¹⁰⁾¹²⁾¹³⁾。ここに、 S_{it} は時点 t における i 番目の証券価格、 D_{it} は時点 t における i 番目の証券の配当支払い価格である。また、時点 t での証券 i のグロスの資産収益率は、ネットの資産収益率に 1 を加えたものなので、 $1 + R_{it}$ である。式(1)の時点 $t-k$ から時点 t 期までの直近 k 期間の資産の収益率において配当支払いを考慮しない場合には

$$\begin{aligned} 1 + R_{it}(k) &= (1 + R_{it})(1 + R_{it-1}) \cdots (1 + R_{it-k+1}) \\ &= \left(\frac{S_{it}}{S_{it-1}} \right) \left(\frac{S_{it-1}}{S_{it-2}} \right) \cdots \left(\frac{S_{it-k+1}}{S_{it-k}} \right) \\ &= \frac{S_{it}}{S_{it-k}} \end{aligned} \quad (2)$$

と表記できる¹²⁾¹³⁾。式(2)をもとに基準時点からの資産の上昇率を見積もることができる。証券 i のこの期間中の資産収益率を単位期間当りのネット資産収益率 $E(R_{it})$ に換算するために

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{Geo_i}(k) &= E(R_{it}) \\ &= \left[\prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{it-j}) \right]^{\frac{1}{k}} - 1 \end{aligned} \quad (3)$$

と、幾何平均を用いて表すことができる¹²⁾¹³⁾。ファイナンスでは、算術平均よりも運用パフォーマンスにおいてこの幾何平均を用いることが望ましいとされている。ファンド・マネジャーの評価においても重要である。

しかしながら、一般には式(3)について $R_{it} = 0$ 近傍における一次近似式

$$\hat{\mu}_i(k) = E(R_{it}) \approx \bar{R}_{it} = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} R_{it-j} \quad (4)$$

により算術平均の収益率を実用することが多いようである¹²⁾¹³⁾。式(3)と式(4)の値が近い場合には問題がないが、高次の項を無視できない場合には差異が問題となり、式(4)による算出の近似では十分ではない。

一方で、式(3)のような幾何平均を計算することが容易ではないので、複利収益率による計算方法がある。この考え方は近似ではなく資産の収益率のモデル化において重要である。資産の連続複利の収益率の対数(騰落率)は、グロスの資産収益率 $(1 + R_{it})$ の自然対数を用いて

$$r_{it} \equiv \log(1 + R_{it}) = \log\left(\frac{S_{it}}{S_{it-1}}\right) \quad (5)$$

と表記できる¹⁰⁾¹²⁾¹³⁾。したがって、多期間の連続複利収益率は

$$\begin{aligned} r_{it}(k) &= \log(1 + R_{it}(k)) \\ &= \log\left(\prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{it-j})\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \log(1 + R_{it-j}) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} r_{it-j} \end{aligned} \quad (6)$$

と和の形式で表すことができる。

ただし、時点 t のポートフォリオにおいて投資比率 $w_i (i = 1, \dots, n)$ 、すなわち投資比率ベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \{w_1, w_2, \dots, w_n\}^T \\ \mathbf{1} &= \{1, 1, \dots, 1\}^T \\ \mathbf{1}^T \mathbf{w} &= 1 \end{aligned} \quad (7)$$

もしくは安全資産利率 R_F の投資比率 w_F も投資に含めて

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \{w_1, w_2, \dots, w_n\}^T \\ \mathbf{1} &= \{1, 1, \dots, 1\}^T \\ \mathbf{1}^T \mathbf{w} + w_F &= 1\end{aligned}\quad (8)$$

による資産形成を考え、ポートフォリオの収益率

$$r_{p_t} = \sum_{i=1}^n w_i r_{i_t} = \mathbf{w}^T \mathbf{r}_t \quad (9)$$

$$\because \mathbf{r}_t = \{r_{1_t}, r_{2_t}, \dots, r_{n_t}\}^T$$

は厳密には対数の和ではないことに注意を要する。
この場合、 $R_{i_t} = 0$ 近傍で対数の一次近似を用いて

$$\begin{aligned}r_{p_t} &= \log(1 + R_{p_t}) \\ &= \log\left(1 + \sum_{i=1}^n w_i R_{i_t}\right) \\ &\cong \sum_{i=1}^n w_i R_{i_t} \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{R}_t \\ \because \mathbf{R} = \mathbf{R}_t &= \{R_{1_t}, R_{2_t}, \dots, R_{n_t}\}^T\end{aligned}\quad (10)$$

と表すことができる。本研究では後ほどの 7.2 のデータ分析において式(9)と式(10)についてパフォーマンスの違いを考察している。

したがって、対数平均による証券 i の期待資産収益率を

$$E(r_{i_t}) = \bar{r}_{i_t} = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} r_{i_{t-j}} \quad (11)$$

と表記し、算術平均による証券 i の期待資産収益率を

$$E(R_{i_t}) = \bar{R}_{i_t} = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} R_{i_{t-j}} \quad (12)$$

と表記する¹²⁾¹³⁾。ただし、次節以降において平均の表記を用いる場合には、説明を簡略化のため、特に

言及しない限り対数平均でも $E(R_i)$ を用いることとする。そして、その平均ベクトルを

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{E}(\mathbf{R}) = \{E(R_1), \dots, E(R_n)\}^T \quad (13)$$

と表記し⁷⁾⁸⁾、次節の統計量と併せて平均分散モデルを記述する。

2.2 高次統計量の表記

本節では、平均だけではなく、本研究で用いる高次の統計量についても表記方法を示す。たとえば、分散は

$$\begin{aligned}\sigma_{i_t}^2 &= \text{Var}(R_{i_t}) \\ &= E\left[(R_{i_t} - E(R_{i_t}))^2\right] \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (R_{i_{t-j}} - E(R_{i_t}))^2\end{aligned}\quad (14)$$

と表記する。このとき、データ分析では平均も未知のため、 $k-1$ で割ることが望ましいのだが、共分散や相関係数には k で割る Excel の標準関数を活用し、Microsoft Access によるデータベース操作¹⁾にも都合が良いので、式(14)のように示すこととする。このため、後ほどの 7.3 で示す Excel のユーザ定義関数として歪度

$$\begin{aligned}\text{Skew}(R_{i_t}) &= E\left[\frac{(R_{i_t} - E(R_{i_t}))^3}{\sigma_{i_t}^3}\right] \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(R_{i_{t-j}} - E(R_{i_t}))^3}{\sigma_{i_t}^3}\end{aligned}\quad (15)$$

や、超過尖度

$$\begin{aligned}\text{Kurt}(R_{i_t}) &= E\left[\frac{(R_{i_t} - E(R_{i_t}))^4}{\sigma_{i_t}^4}\right] - 3 \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(R_{i_{t-j}} - E(R_{i_t}))^4}{\sigma_{i_t}^4} - 3\end{aligned}\quad (16)$$

の表記も k で割る方法を採用する¹²⁾¹³⁾。ただし、

歪度と超過尖度を推定する Excel の標準関数の定義式²⁰⁾とは異なるのでデータ分析の際に、この場合の差異についても後ほどの 7.3 で改めて考察している。

また、共分散は

$$\begin{aligned}\rho_{il}\sigma_i\sigma_l &= \text{Cov}(R_{i_t}, R_{l_t}) \\ &= E[(R_{i_t} - E(R_{i_t}))(R_{l_t} - E(R_{l_t}))] \\ &= E[R_{i_t}R_{l_t}] - E(R_{i_t})E(R_{l_t}) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (R_{i_{t-j}} - E(R_{i_t}))\end{aligned}\quad (17)$$

と表記する。式(17)の中で用いた ρ_{il} は相関係数であり

$$\begin{aligned}\rho_{il} &= \text{Corr}(R_{i_t}, R_{l_t}) \\ &= \frac{\text{Cov}(R_{i_t}, R_{l_t})}{\sigma_{i_t}\sigma_{l_t}} \\ &= E\left[\frac{(R_{i_t} - E(R_{i_t}))}{\sigma_{i_t}} \frac{(R_{l_t} - E(R_{l_t}))}{\sigma_{l_t}}\right] \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(R_{i_{t-j}} - E(R_{i_t}))}{\sigma_{i_t}} \frac{(R_{l_{t-j}} - E(R_{l_t}))}{\sigma_{l_t}}\end{aligned}\quad (18)$$

と表記する¹²⁾¹³⁾。

以上をもとに、収益率の分散共分散行列は

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= E[(\mathbf{R} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{R} - \boldsymbol{\mu})^T] \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \text{Sym.} \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n & \cdots & \rho_{n-1n}\sigma_{n-1}\sigma_n & \sigma_n^2 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (19)$$

と表記する⁷⁾⁸⁾。

2.3 時系列統計量の表記と検定

本節では、本研究で用いる時系列に関する統計量の表記方法を示す。 k 次の自己共分散 $\gamma_i(k)$ と自己相関係数 $\rho_i(k)$ は以下のように表記する。すなわち

$$\begin{aligned}\gamma_i(k) &\equiv E[(R_{i_t} - E(R_{i_t}))(R_{i_{t-k}} - E(R_{i_{t-k}}))] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=k+1}^T (R_{i_t} - \bar{R}_{i_T})(R_{i_{t-k}} - \bar{R}_{i_T})\end{aligned}\quad (20)$$

$$\begin{aligned}\rho_i(k) &\equiv \frac{\gamma_i(k)}{\gamma_i(0)} \\ &= \frac{E[(R_{i_t} - E(R_{i_t}))(R_{i_{t-k}} - E(R_{i_{t-k}}))]}{E[(R_{i_t} - E(R_{i_t}))^2]} \\ &= \frac{\sum_{t=k+1}^T (R_{i_t} - \bar{R}_{i_T})(R_{i_{t-k}} - \bar{R}_{i_T})}{\sum_{t=1}^T (R_{i_t} - \bar{R}_{i_T})^2}\end{aligned}\quad (21)$$

である¹²⁾¹⁴⁾。ただし、

$$\bar{R}_{i_T} = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T R_{i_t}\quad (22)$$

である。ここで、自己相関係数の検定として

$$\begin{cases} H_0: \rho_i(k) = 0 \\ H_1: \rho_i(k) \neq 0 \end{cases}\quad (23)$$

を考える。すなわち、Ljung・Box 統計量

$$Q_{im} \equiv T(T+2) \sum_{k=1}^m \frac{\rho_i^2(k)}{T-k} \sim \chi^2(k)\quad (24)$$

を用いて検定する¹²⁾¹⁴⁾。

3. モデリングのための数理計画法による考え方

3.1 等式制約付きの二次計画法の解法

数理計画法における二次計画法の解法として、下記のモデル

$$\begin{aligned}\text{minimize} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} + \mathbf{c}^T \mathbf{w} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{A} \mathbf{w} = \mathbf{b}\end{aligned}\quad (25)$$

を考える²⁰⁾。このときの Lagrange 関数は

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} + \mathbf{c}^T \mathbf{w} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A} \mathbf{w} - \mathbf{b})\quad (26)$$

である。式(26)について一階の導関数より

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} &= \mathbf{V}\mathbf{w} + \mathbf{c} + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} &= \mathbf{A}\mathbf{w} - \mathbf{b} = \mathbf{0}\end{aligned}\quad (27)$$

もしくは

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}\quad (28)$$

である。ゆえに

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda} &= -(\mathbf{A}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{c} + \mathbf{b}) \\ \mathbf{w} &= -\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}^{-1})\mathbf{c} \\ &\quad + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b}\end{aligned}\quad (29)$$

と求まる²⁰⁾。ただし、ここで \mathbf{I} は単位行列である。

3.2 等式制約付きの一次項のない二次計画法の解法

3.1 では一次項を含む二次計画法としての解法を確認したが、一次項のない場合の下記モデル

$$\begin{aligned}\text{minimize} \quad & \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{V}\mathbf{w} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{b}\end{aligned}\quad (30)$$

を考える²⁰⁾。このときの Lagrange 関数は

$$L = \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{V}\mathbf{w} + \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{A}\mathbf{w} - \mathbf{b})\quad (31)$$

である。式(31)について一階の導関数より

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} &= \mathbf{V}\mathbf{w} + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} &= \mathbf{A}\mathbf{w} - \mathbf{b} = \mathbf{0}\end{aligned}\quad (32)$$

もしくは

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}\quad (33)$$

である³²⁾。ゆえに

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda} &= -(\mathbf{A}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b}\end{aligned}\quad (34)$$

と求まる²⁰⁾。また、式(25)と式(30)のモデルに $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ を追加して空売りを考慮しない場合が、Markowitz によりモデリングされている³²⁾。4章では、本研究の平均分散モデルは、3.1 もしくは 3.2 の解法が基本となり、空売りを認める場合のモデルについて考察している。この解の形式は4章の説明において重要である。

4. 株式の空売りを認める平均分散モデル

4.1 安全資産利子率を含まない空売りを認めるポートフォリオの平均分散モデル

まず、一般的な解法で表すポートフォリオをポートフォリオ \mathbf{P} と呼ぶことにする。すなわち、式(30)を参考に

$$\begin{aligned}\text{minimize} \quad & \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{V}\mathbf{w} \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{\mu}^T\mathbf{w} = \mu_P \\ & \mathbf{1}^T\mathbf{w} = 1\end{aligned}\quad (35)$$

と表記する⁷⁾⁻⁹⁾²¹⁾³⁴⁾⁴⁴⁾。あるいは

$$\begin{aligned}\text{minimize} \quad & \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{V}\mathbf{w} \\ \text{subject to} \quad & \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^T \\ \mathbf{1}^T \end{bmatrix} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mu_P \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (36)$$

と表記することも可能なので、式(36)を用いて考察を進める。ここに、 \mathbf{w} は n 個の証券からなる投資比率ベクトルである。 μ_P は目標として設定する期待収益率である。 $\mathbf{1}$ は n 個の要素がすべて1であるベクトルである。さらに、 $\boldsymbol{\mu}$ は n 個の証券の期待収益率のベクトル、 \mathbf{V} は n 個の証券の収益率の分散共分散行列である。このため、 $\mathbf{w}^T\mathbf{V}\mathbf{w}$ はポートフォリオの収益率の分散、 $\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{w}$ はポートフォリオの期待収益率である。このとき、式(36)の Lagrange 関数は

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} + \lambda^T \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^T \\ \mathbf{1}^T \end{bmatrix} \mathbf{w} - \begin{Bmatrix} \mu_P \\ 1 \end{Bmatrix} \right) \quad (37)$$

である．この一階の導関数より

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} &= \mathbf{V} \mathbf{w} + [\boldsymbol{\mu} \ \mathbf{1}] \lambda = \mathbf{0} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^T \\ \mathbf{1}^T \end{bmatrix} \mathbf{w} - \begin{Bmatrix} \mu_P \\ 1 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (38)$$

となる．ゆえに

$$\begin{aligned} \lambda &= - \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^T \\ \mathbf{1}^T \end{bmatrix} \mathbf{V}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{Bmatrix} \mu_P \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} & \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mu_P \\ 1 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{w} &= [\mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} \ \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} & \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mu_P \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (39)$$

と求まる³⁴⁾³⁶⁾．ここで

$$\begin{aligned} a &= \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} \\ b &= \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \\ c &= \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \\ D &= \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} & \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \end{bmatrix} = ac - b^2 \end{aligned} \quad (40)$$

とおくとき

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_P &= \frac{1}{D} ((c\mu_P - b)\mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} + (a - b\mu_P)\mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{D} ((c\mu_P - b)\mathbf{z}_\mu + (a - b\mu_P)\mathbf{z}_1) \\ \lambda_P &= \frac{1}{D} \begin{Bmatrix} c\mu_P - b \\ a - b\mu_P \end{Bmatrix} \\ \sigma_P^2 &= \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} = \frac{1}{D} (c\mu_P^2 - 2b\mu_P + a) \\ &= \frac{1}{c} + \frac{c}{D} \left(\mu_P - \frac{b}{c} \right)^2 \\ &= \sigma_C^2 + \frac{c}{D} \left(\mu_P - \frac{b}{c} \right)^2 \end{aligned} \quad (41)$$

と導出できる⁴⁴⁾．ただし， $\det[\cdot]$ は \cdot の行列式を意味する．このとき， $\mathbf{z}_\mu = \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu}$ ， $\mathbf{z}_1 = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}$ を用いて式の表記を整理している．また， σ_C^2 は次節で

記述する最小分散ポートフォリオの分散である．

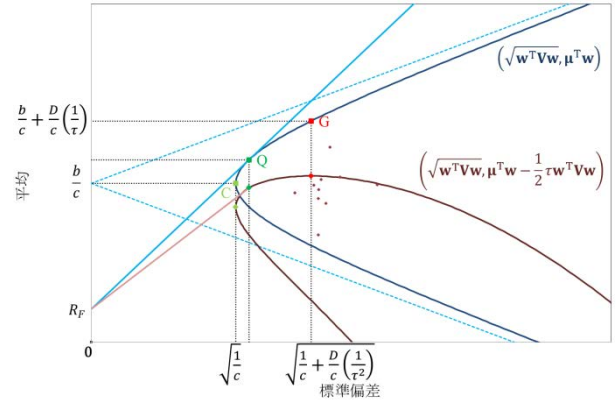


図5 空売りを認める平均分散モデルの数理的特徴の視覚化⁵⁾⁶⁾⁸⁾³³⁾³⁹⁾⁴²⁾⁴⁴⁾

Fig. 5 Mathematical characteristics of mean-variance models with short position⁵⁾⁶⁾⁸⁾³³⁾³⁹⁾⁴²⁾⁴⁴⁾

したがって，式(41)の σ_P^2 について平方完成により双曲線⁴⁶⁾

$$\frac{\sigma_P^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2} - \frac{\left(\mu_P - \frac{b}{c}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{D}}{c}\right)^2} = 1 \quad (42)$$

が示され⁴⁴⁾，ポートフォリオの目標とする期待収益率 μ_P と標準偏差 σ_P の関係は図5の青色実線による曲線のように描くことができる⁷⁾⁸⁾．このとき，水色破線は双曲線の漸近線を示している．ただし，図5において点Qが点Cの上方に位置するように算出するためには， $b/c > R_F$ を満たさなければならない⁸⁾．このことは，後ほど7.1で考察する．

4.2 最小分散ポートフォリオのための平均分散モデルの解法

ポートフォリオの中でも分散が最小となるポートフォリオを本研究では特にポートフォリオCと呼ぶことにする．図5では点Cを意味するポートフォリオである．すなわち，式(30)を参考に

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} \\ &\text{subject to} \quad \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \end{aligned} \quad (43)$$

である。このときの Lagrange 関数は

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} + \lambda (\mathbf{1}^T \mathbf{w} - 1) \quad (44)$$

なので、一階の導関数より

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} &= \mathbf{V} \mathbf{w} + \lambda \mathbf{1} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \mathbf{1}^T \mathbf{w} - 1 = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

となる。ゆえに

$$\begin{aligned} \lambda_c &= -\frac{1}{(\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1})} = -\frac{1}{c} \\ \mathbf{w}_c &= \frac{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}} = \frac{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}}{c} = \frac{\mathbf{z}_1}{c} = \frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{1}^T \mathbf{z}_1} \\ \sigma_c^2 &= \mathbf{w}_c^T \mathbf{V} \mathbf{w}_c = \frac{1}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}} = \frac{1}{c} \\ \mu_c &= \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w}_c = \frac{\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}} = \frac{b}{c} \end{aligned} \quad (46)$$

と導出できる¹²⁾¹³⁾²²⁾。この式(46)に、式(41)の $\mu_P = b/c$ を代入すると $\sigma_P^2 = \sigma_c^2$ となり完全に一致することがわかる。また、式(46)から \mathbf{w}_c は $\mathbf{z}_1/\mathbf{1}^T \mathbf{z}_1$ の比率を意味していることも理解できる。以上より、ポートフォリオ C は図 5 の点 C のようにリスクを最小にしていることがわかる。

4.3 期待効用最大化ポートフォリオの平均分散モデルの解法(リスク調整ポートフォリオ)

Arrow-Pratt 型リスク回避度 τ ²²⁾を考慮した期待効用ポートフォリオを考察する。このときのポートフォリオをポートフォリオ G と呼ぶことにする。図 5 では点 G を意味するポートフォリオである。すなわち、式(25)を参考に

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} - \frac{1}{2} \tau \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \end{aligned} \quad (47)$$

である⁵⁾⁶⁾²²⁾²⁴⁾。ここに、目的関数 $\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} - \tau \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}/2$ は 2 次型効用関数として定義している。このときの

Lagrange 関数は

$$L = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} - \frac{1}{2} \tau \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} - \lambda (\mathbf{1}^T \mathbf{w} - 1) \quad (48)$$

なので、一階の導関数より

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} &= \boldsymbol{\mu} - \tau \mathbf{V} \mathbf{w} - \lambda \mathbf{1} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \mathbf{1}^T \mathbf{w} - 1 = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

である。ゆえに

$$\begin{aligned} \lambda_G &= \frac{b - \tau}{c} \\ \mathbf{w}_G &= \frac{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}}{c} + \frac{1}{c\tau} (c\mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} - b\mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}) \\ &= \mathbf{w}_c + \frac{1}{c\tau} (c\mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} - b\mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}) \\ &= \mathbf{w}_c + \frac{1}{c\tau} (c\mathbf{z}_\mu - b\mathbf{z}_1) \\ \sigma_G^2 &= \mathbf{w}_G^T \mathbf{V} \mathbf{w}_G = \frac{1}{c} + \frac{D}{c} \left(\frac{1}{\tau^2} \right) \\ &= \sigma_c^2 + \frac{D}{c} \left(\frac{1}{\tau^2} \right) \\ \mu_G &= \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w}_G = \frac{b}{c} + \frac{D}{c} \left(\frac{1}{\tau} \right) \\ &= \mu_c + \frac{D}{c} \left(\frac{1}{\tau} \right) \end{aligned} \quad (50)$$

と導出できる²⁴⁾。このときポートフォリオ G は、最小分散ポートフォリオ C よりも $1/\tau$ のリスク許容度(リスク回避度の逆数)だけ積極的な投資スタイルを有していることが明らかである。また、一般には最大期待収益率から最小分散ポートフォリオの期待収益率までを効率的フロンティアとして検討するが、図 5 に示す最適成長ポートフォリオ⁵⁾⁶⁾ ($\tau = 1.0$ の場合)の点 G から最小分散ポートフォリオの点 C までの間で投資の意思決定を行うことができることも図 5 の傾向より改めて確認できる。また、この部分は効率的フロンティアの一部分を意味しており、投資において有効な投資戦略の決定範囲でもある。

以上より、ポートフォリオ G は期待効用最大となる図 6 の点 G を意味していることがわかる。また、

期待効用最大化ポートフォリオは図 6 の緑色破線の傾向として図示している。加えてわかりやすいように、細実線で $\tau = 0.1 \sim 1.0$ までの効率的フロンティアを追加している。また、その下部分である非効率的なポートフォリオを図示し、リスク回避度 τ によるポートフォリオの傾向を示している。

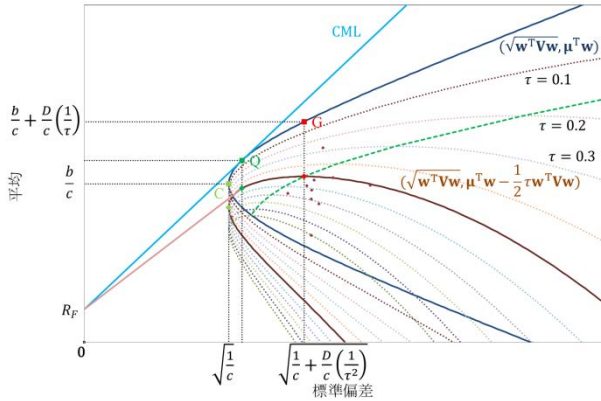


図 6 リスク回避度による $\mu^T \mathbf{w} - \tau \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} / 2$ の傾向

Fig.6 Characteristics of $\mu^T \mathbf{w} - \tau \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} / 2$ by indices of risk aversion

4.4 安全資産利子率を含む空売りを認めるポートフォリオの平均分散モデル(資本市場線)

安全資産利子率 R_F を含むポートフォリオをポートフォリオ PF と呼ぶことにする。すなわち、式(30)を参考に

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} \\ & \text{subject to} \quad \mu^T \mathbf{w} + R_F w_F = \mu_P \\ & \quad \quad \quad \mathbf{1}^T \mathbf{w} + w_F = 1 \end{aligned} \quad (51)$$

である⁷⁾⁹⁾⁴⁴⁾。ここに、 $\mathbf{1}^T \mathbf{w} + w_F$ は全投資比率の総和なので 1 である。この式(51)について予算制約より安全資産利子率 R_F の投資比率は $w_F = 1 - \mathbf{1}^T \mathbf{w}$ だから、次のように

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} \\ & \text{subject to} \quad (\mu - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{w} = \mu_P - R_F \end{aligned} \quad (52)$$

と変形できる⁹⁾。式(52)の Lagrange 関数は

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} + \lambda ((\mu - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{w} - (\mu_P - R_F)) \quad (53)$$

であるので、その一階の導関数より

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} &= \mathbf{V} \mathbf{w} + \lambda (\mu - R_F \mathbf{1}) = \mathbf{0} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= (\mu - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{w} - (\mu_P - R_F) = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

となる。ゆえに、 $\mathbf{R}_Q = \mu - R_F \mathbf{1}$, $H = \mathbf{R}_Q^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q = a - 2bR_F + cR_F^2$ とおくと⁷⁾⁹⁾⁴⁴⁾

$$\begin{aligned} \lambda_{PF} &= -\frac{\mu_P - R_F}{(\mu - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{V}^{-1} (\mu - R_F \mathbf{1})} \\ &= \frac{\mu_P - R_F}{\mathbf{R}_Q^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q} \\ &= \frac{\mu_P - R_F}{a - 2bR_F + cR_F^2} \\ &= \frac{\mu_P - R_F}{H} \\ \mathbf{w}_{PF} &= \frac{(\mu_P - R_F) \mathbf{V}^{-1} (\mu - R_F \mathbf{1})}{(\mu - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{V}^{-1} (\mu - R_F \mathbf{1})} \\ &= \frac{(\mu_P - R_F) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q}{\mathbf{R}_Q^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q} \\ &= \frac{(\mu_P - R_F) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q}{a - 2bR_F + cR_F^2} \\ &= \frac{(\mu_P - R_F) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q}{H} \\ w_F &= 1 - \mathbf{1}^T \mathbf{w}_{PF} \\ &= \frac{(\mu - \mu_P \mathbf{1})^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q}{H} \\ \sigma_{PF}^2 &= \mathbf{w}_{PF}^T \mathbf{V} \mathbf{w}_{PF} \\ &= \frac{(\mu_P - R_F)^2}{(\mu - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{V}^{-1} (\mu - R_F \mathbf{1})} \\ &= \frac{(\mu_P - R_F)^2}{a - 2bR_F + cR_F^2} \\ &= \frac{(\mu_P - R_F)^2}{H} \\ \mu_{PF} &= \mu^T \mathbf{w}_{PF} + R_F w_F \\ &= \mu_P \end{aligned} \quad (55)$$

と導出できる⁴⁴⁾。

この式(55)において $\mathbf{1}^T \mathbf{w}_{PF} = 1$ を満たす $\mu^T \mathbf{w}_{PF} = \mu_P$ のとき、安全資産利子率 R_F の投資比

率 $w_F = 0$ が成立する．したがって，これを代入するとポートフォリオ PF はポートフォリオ P としても完全に一致することが期待できる．

以上より，ポートフォリオ PF は資本市場線(CML; Capital Market Line)上⁸⁾³³⁾のポートフォリオを意味し，図 5 と図 6 の上側の水色実線を意味することがわかる．4.5 では，このうちの接点ポートフォリオについて考察する．

4.5 安全資産利子率を含む空売りを認める接点ポートフォリオの平均分散モデル(シャープ・レシオ最大化)

ポートフォリオ PF の解を示す式(55)において，安全資産利子率 R_F の投資比率 $w_F = 0$ となる場合がある．このことは，ポートフォリオ P とも関係があるはずである．そこで，特にこのポートフォリオをポートフォリオ Q と呼ぶことにする．すなわち

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad \frac{(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{w}}{\sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}}} \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \end{aligned} \quad (56)$$

である¹⁰⁾²²⁾．そして，目的関数はシャープ・レシオが最大となるようにモデル化されている．ここで，シャープ・レシオを

$$\theta = \frac{(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{w}}{\sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}}} = \frac{\mathbf{R}_Q^T \mathbf{w}}{\sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}}} \quad (57)$$

とおき，一階微分して左辺に分母を移項すると

$$\begin{aligned} & (\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w})^{3/2} \frac{d\theta}{d\mathbf{w}} \\ & = (\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})(\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}) - \theta \mathbf{V} \mathbf{w} = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

が得られる¹⁰⁾．そこで，式(56)の制約式と式(58)より構成される下記の方程式

$$\begin{cases} \theta \mathbf{V} \mathbf{w} = (\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})(\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}) \\ \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \end{cases} \quad (59)$$

について解くと

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_Q &= \frac{\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})} \\ &= \frac{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q} \\ &= \frac{\mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}}{b - c R_F} \\ &= \frac{\mathbf{z}_Q}{\mathbf{1}^T \mathbf{z}_Q} \\ &= \frac{\mathbf{z}_\mu - R_F \mathbf{z}_1}{b - c R_F} \\ \sigma_Q^2 &= \mathbf{w}_Q^T \mathbf{V} \mathbf{w}_Q \\ &= \frac{(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})}{(\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1}))^2} \\ &= \frac{\mathbf{R}_Q^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q}{(\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q)^2} \\ &= \frac{\mathbf{R}_Q^T \mathbf{z}_Q}{(\mathbf{1}^T \mathbf{z}_Q)^2} \\ &= \frac{a - 2b R_F + c R_F^2}{(b - c R_F)^2} \\ \mu_Q &= \mathbf{\mu}^T \mathbf{w}_Q \\ &= \frac{\mathbf{\mu}^T \mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})} \\ &= \frac{\mathbf{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q} \\ &= \frac{\mathbf{\mu}^T \mathbf{z}_Q}{\mathbf{1}^T \mathbf{z}_Q} \\ &= \frac{a - b R_F}{b - c R_F} \\ \theta_Q &= \frac{(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{w}_Q}{\sqrt{\mathbf{w}_Q^T \mathbf{V} \mathbf{w}_Q}} \\ &= \sqrt{(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})^T \mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_F \mathbf{1})} \\ &= \sqrt{\mathbf{R}_Q^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q} \\ &= \sqrt{\mathbf{R}_Q^T \mathbf{z}_Q} \end{aligned} \quad (60)$$

と導出できる¹⁰⁾．ただし， $\mathbf{z}_Q = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_Q$ である．まず，ここで安全資産利子率を $R_F \rightarrow -\infty$ と仮定すると式(60)から

$$\begin{aligned}
\lim_{R_F \rightarrow -\infty} \mathbf{w}_Q &= \lim_{R_F \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\mathbf{z}_\mu - \mathbf{z}_1}{R_F} - \mathbf{z}_1}{\frac{b}{R_F} - c} = \frac{\mathbf{z}_1}{c} = \mathbf{w}_C \\
\lim_{R_F \rightarrow -\infty} \sigma_Q^2 &= \lim_{R_F \rightarrow -\infty} \frac{\frac{a}{R_F^2} - \frac{2b}{R_F} + c}{\frac{b^2}{R_F^2} - \frac{2bc}{R_F} - c^2} = \frac{1}{c} = \sigma_C^2 \\
\lim_{R_F \rightarrow -\infty} \mu_Q &= \lim_{R_F \rightarrow -\infty} \frac{\frac{a}{R_F} - b}{\frac{b}{R_F} - c} = \frac{b}{c} = \mu_C
\end{aligned} \quad (61)$$

としてポートフォリオ \mathbf{Q} はポートフォリオ \mathbf{C} に収束する¹⁰⁾。すなわち、図 5 の安全資産利子率 R_F をマイナス方向に大きく移動すると点 \mathbf{Q} が点 \mathbf{C} に近づく様子がイメージできる。

ところで、式(60)と式(55)より、 $\mathbf{w}_Q = \mathbf{w}_{PF}$ とするとき

$$\frac{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R}_Q}{\mathbf{1}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R}_Q} = \frac{(\mu_P - R_F)\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R}_Q}{\mathbf{R}_Q^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R}_Q} \quad (62)$$

から

$$\frac{(\mu_P - R_F)}{\sqrt{\frac{\mathbf{R}_Q^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R}_Q}{\mathbf{1}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R}_Q}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{R}_Q^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R}_Q}{\mathbf{1}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R}_Q}} \quad (63)$$

となる。ここで、資本資産評価モデル(CAPM)³³⁾におけるマーケット・ポートフォリオの平均を μ_M とし、標準偏差を σ_M とすると

$$\frac{\mu_P - R_F}{\sigma_P} = \rho_{PM} \frac{\mu_M - R_F}{\sigma_M} \quad (64)$$

より

$$\mu_P - R_F = \rho_{PM} \frac{\sigma_P}{\sigma_M} (\mu_M - R_F) \quad (65)$$

となる。これはポートフォリオ \mathbf{P} とマーケット \mathbf{M} の収益率の相関係数が $\rho_{PM} = 1.0$ のときの資本市場線⁸⁾³³⁾である。すなわち、リスクの感応度も $\beta = \rho_{PM}\sigma_P/\sigma_M = 1.0$ である。このときのシャープ・レシオは、ポートフォリオ \mathbf{P} がポートフォリオ \mathbf{Q} で

もあるため

$$\frac{(\mu_Q - R_F)}{\sigma_Q} = \frac{(\mu_P - R_F)}{\sigma_P} = \theta_Q \quad (66)$$

である。したがって、 $\mathbf{w}_P = \mathbf{w}_Q = \mathbf{w}_{PF}$ が成立するため、式(41)に一致するときは必ず式(60)の $\mu_Q = \mu_P = \mu_{PF} = (a - bR_F)/(b - cR_F)$ を満たすことがわかる。このため、ポートフォリオ \mathbf{PF} はポートフォリオ \mathbf{Q} を通過することがいえる。ゆえに、ポートフォリオ \mathbf{Q} がマーケット・ポートフォリオとして接点ポートフォリオと呼ばれていることが理解できる。

ところで、ポートフォリオ \mathbf{Q} とポートフォリオ \mathbf{C} について

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu} &= \mathbf{z}_\mu \\
\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1} &= \mathbf{z}_1
\end{aligned} \quad (67)$$

を用いるとき、式(60)のポートフォリオ \mathbf{Q} の投資比率 \mathbf{w}_Q と、(46)のポートフォリオ \mathbf{C} の投資比率 \mathbf{w}_C より

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_P &= \frac{\mu_Q - \mu_P}{\mu_Q - \mu_C} \mathbf{w}_C + \frac{\mu_P - \mu_C}{\mu_Q - \mu_C} \mathbf{w}_Q \\
&= \frac{1}{D} \left((\mu_P c - b) \mathbf{z}_\mu + (a - \mu_P b) \mathbf{z}_1 \right)
\end{aligned} \quad (68)$$

として式(41)のポートフォリオ \mathbf{P} の投資比率 \mathbf{w}_P に一致する²⁵⁾²⁶⁾。したがって、目標とするポートフォリオの期待収益率 μ_P が与えられた状況下で分散を最小にするポートフォリオ \mathbf{P} は接点ポートフォリオ \mathbf{Q} と最小分散ポートフォリオ \mathbf{C} の線形結合であることがわかる。また、この特徴は前報¹⁾に掲載される投資比率の視覚化の図の傾向とも良く調和している。

さらに、ポートフォリオの期待収益率 $\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w}$ がリスク回避度 τ の大きさにより、期待効用ポートフォリオの効用関数 $\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} - \tau \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} / 2$ とともに変化していく様子を破線として図 6 に示す。このとき、横軸はポートフォリオの標準偏差 $\sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}}$ を示すため、ポートフォリオ \mathbf{C} の標準偏差 σ_C は、 τ の大きさに関係なく一定で、ポートフォリオ \mathbf{Q} の標準偏差 σ_Q についてはポートフォリオ \mathbf{G} と連動していることが改めて確認できる。

5. 空売りを認めないポートフォリオの平均分散モデル

本章では、空売りを認めた場合の個々の条件で呼ぶことにしたポートフォリオ X にプライムを付けて、投資比率 $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ の制約を加えた空売りを認めない場合のポートフォリオをポートフォリオ X' と定義して考察することにする。

5.1 安全資産利子率を含まない空売りを認めないポートフォリオの平均分散モデル

一般的なモデルとして取扱った 4.1 のポートフォリオ P に n 個の証券の投資比率 $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ を加えたモデルを考える。このポートフォリオをポートフォリオ P' と呼ぶことにする。ただし、時点 t のポートフォリオにおいて投資比率 $w_i (i = 1, \dots, n)$ 、すなわち投資比率ベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \{w_1, w_2, \dots, w_n\}^T \\ \mathbf{1} &= \{1, 1, \dots, 1\}^T \\ \mathbf{1}^T \mathbf{w} &= 1 \\ \mathbf{w} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (69)$$

を用いて、ポートフォリオ P' の最適化問題

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} = \mu_P \\ & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (70)$$

を考える。ここで最適解を示すために式(70)を

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} + \lambda_1^T \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} - \mu_P \\ \mathbf{1}^T \mathbf{w} - 1 \end{matrix} \right\} + \lambda_2^T (-\mathbf{w}) \quad (71)$$

とおき、KKT 条件(Karush-Kuhn-Tucker 条件)

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{w}} L &= \mathbf{V} \mathbf{w} + [\boldsymbol{\mu} \ \mathbf{1}] \boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_2 = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_1} L &= \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} - \mu_P \\ \mathbf{1}^T \mathbf{w} - 1 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_2} L &= -\mathbf{1} \leq \mathbf{0} \\ \lambda_2 &\geq \mathbf{0} \\ \lambda_2^T \nabla_{\lambda_2} L &= 0 \end{aligned} \quad (72)$$

を満たす最適解 $\mathbf{w}_{P'}$ を探索する⁹⁾¹¹⁾⁴³⁾。本研究では、最適解は Excel の Solver を VBA で操作しながら探索する¹⁾¹⁵⁾⁻¹⁸⁾。

5.2 安全資産利子率を含む空売りを認めないポートフォリオの平均分散モデル

一般的なモデルとして取扱った 4.4 のポートフォリオ PF に n 個の証券の投資比率 $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ 、安全資産利子率 R_F の投資比率 $w_F \geq 0$ を加えたモデルを考える。このポートフォリオをポートフォリオ PF' と呼ぶことにする。ただし、時点 t の証券のポートフォリオにおいて投資比率 $w_i (i = 1, \dots, n)$ である。すなわち、投資比率ベクトル \mathbf{w} と安全資産利子率 R_F の投資比率 w_F も投資に含めて

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \{w_1, w_2, \dots, w_n\}^T \\ \mathbf{1} &= \{1, 1, \dots, 1\}^T \\ \mathbf{1}^T \mathbf{w} + w_F &= 1 \\ \mathbf{w} &\geq \mathbf{0} \\ w_F &\geq 0 \end{aligned} \quad (73)$$

を用いてポートフォリオ PF' の最適化問題

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} + R_F w_F = \mu_P \\ & \mathbf{1}^T \mathbf{w} + w_F = 1 \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \\ & w_F \geq 0 \end{aligned} \quad (74)$$

より最適解を探索する。

以上について図 5 を示したときと同じ条件で数値実験してみると、図 7 に示すように PF' の傾向は安全資産利子率 R_F の点 RF から点 Q' までは CML 上に求まり、点 Q' から点 G' までは空売りのない場合の解と同様に得られる。また、この図 7 に示す破線は、図 5 と図 6 で示した空売りを認める場合のポートフォリオの傾向である。

ところで、本章までは平均を縦軸に、標準偏差を横軸に説明し、平均分散モデルを取扱ってきたが、実際には n 証券の多変量データの挙動を分析している。そこで、次章では多変量のデータ解析を実施するために用いる同時分布を考察する視点で平均分散モデルを取扱う。また、後ほど 7 章ではデータ分

析として、次章の同時分布を用いて、図 5、図 6、図 7 に得られるポートフォリオの特性について考察している。

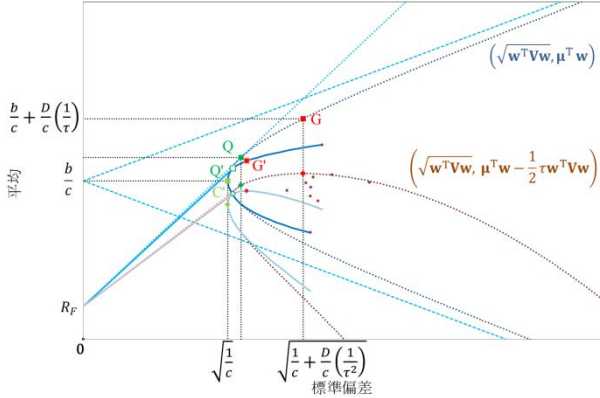


図 7 空売りを認めない平均分散モデルの数理的特徴の視覚化⁵⁾⁶⁾

Fig.7 Mathematical characteristics of mean-variance models without short position⁵⁾⁶⁾

6. 同時分布の信頼楕円体を考慮した平均分散モデルの考察

証券のポートフォリオ管理では、平均分散モデルを用いて評価されることが前章まででわかった。一方で、意思決定における不確実性は、機会制約条件モデル²⁸⁾における等価確定式でも取扱うことができる。前者と後者はともに相関係数の大きさを取扱うことが可能であるが、機会制約条件モデルでの相関係数の大きさに関しては、Agnew ら⁴⁵⁾が平均分散モデルに適用している。このことを多変量解析としてモデル化するために同時分布の信頼楕円体⁴⁷⁾⁴⁸⁾とも融合して考察することは、平均分散モデルの分散投資の視覚化の観点からも重要と考えられる。

そこで、本章では機会制約条件モデルの特徴を鑑みながら、同時分布の信頼楕円体を考慮した平均分散モデルとの関係について考察を実施している。これまでも平均分散モデルを提案した Markowitz³²⁾も同時分布と平均と標準偏差の幾何学的特性について取扱っている。これに相関係数の大きさの特徴をより詳細に調査することが重要である。

また、一般に空売りを認めない場合のみを考慮した平均分散モデルは 5 章で記述したように表記される。そして、収益率 \mathbf{R} は確率変数として取扱っている。厳密な意味でも平均分散モデルのポートフォ

リオ管理では、解析のために投資比率を \mathbf{w} として確定的に取扱うことが一般的である。しかし、実際には投資比率どおりに正確に買い付けることが困難である。

そこで、特記すべき点として、 \mathbf{R} ほどバラツキが大きいわけではないが、 $\tilde{\mathbf{w}}$ も確率変数として本来は取扱われなければならない。すなわち、このことを意識した中で、投資比率の不確実性を想定することは重要である。以下では、投資比率 $\tilde{\mathbf{w}}$ に関する機会制約条件モデルを説明する。

6.1 ポートフォリオ管理における機会制約条件モデル

平均分散モデルのポートフォリオ管理として、 $\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{R}$ の投資比率 $\tilde{\mathbf{w}}$ の期待値 $\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{w}})$ と分散 $\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{w}}}$ を用いて分析する。

このとき、正規分布の片側確率点を λ_{CCM} とするとき、等価確定式²⁸⁾

$$\frac{\mathbf{R}^T (\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{w}}))}{\sqrt{\mathbf{R}^T \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{w}}} \mathbf{R}}} \geq \lambda_{CCM} \quad (75)$$

を二乗した

$$\lambda_{CCM}^2 \mathbf{R}^T \mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{w}}} \mathbf{R} - \left(\mathbf{R}^T (\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{w}})) \right)^2 \leq 0 \quad (76)$$

は、平均分散モデルをリターンによる直交座標系で視覚化した傾向として示すことができる。すなわち、図 8 から図 10 のように相関係数の大きさに応じて不確実性が確認できる。

ここで、図 8 では、投資比率 $\tilde{\mathbf{w}}_1$ と $\tilde{\mathbf{w}}_2$ の相関係数 $\rho_{\tilde{\mathbf{w}}_1 \tilde{\mathbf{w}}_2} = 0.9$ の場合を取扱っている。図 9 では、投資比率 $\tilde{\mathbf{w}}_1$ と $\tilde{\mathbf{w}}_2$ の相関係数 $\rho_{\tilde{\mathbf{w}}_1 \tilde{\mathbf{w}}_2} = 0.0$ の場合を取扱っている。図 10 では、投資比率 $\tilde{\mathbf{w}}_1$ と $\tilde{\mathbf{w}}_2$ の相関係数 $\rho_{\tilde{\mathbf{w}}_1 \tilde{\mathbf{w}}_2} = -0.9$ の場合を取扱っている。このようにそれぞれ相関関係を視覚化できる。図 8 から図 10 では、投資比率 $\tilde{\mathbf{w}}_1$ の変動係数を $\delta_1 = 0.05$ 、投資比率 $\tilde{\mathbf{w}}_2$ の変動係数を $\delta_2 = 0.05$ とし、 $\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{w}}_1) = \mathbf{w}$ 、 $\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{w}}_2) = 1 - \mathbf{w}$ の傾向をプロットし、 λ の倍数を変化させながら複数本の曲線を描いている。

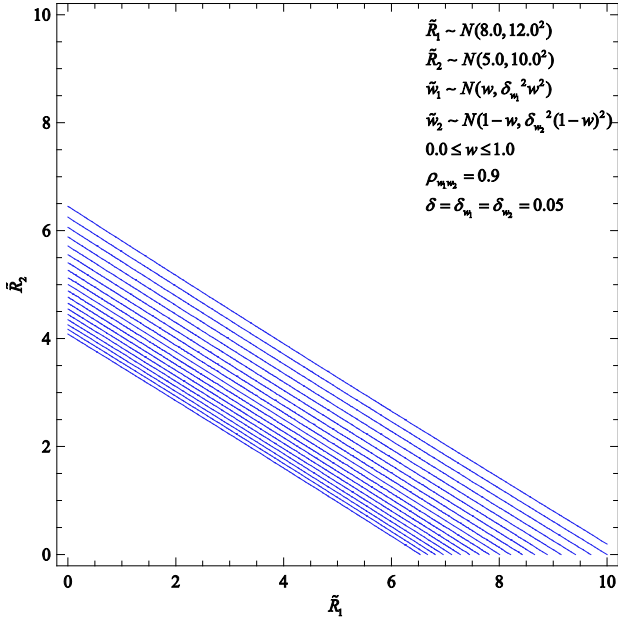


図 8 機会制約条件モデルによる視覚化 ²⁷⁾
($\rho_{w_1 w_2} = 0.9$)
Fig.8 Visualizations of chance-constrained programming models ($\rho_{w_1 w_2} = 0.9$)

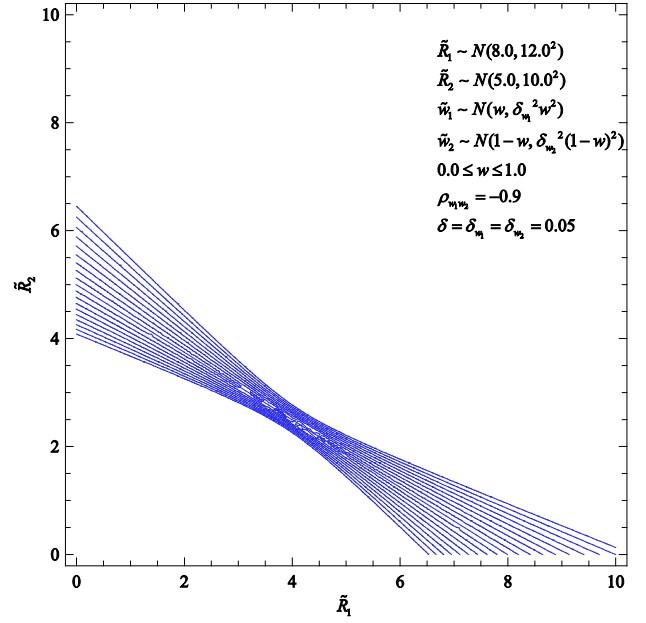


図 10 機会制約条件モデルによる視覚化 ²⁷⁾
($\rho_{w_1 w_2} = -0.9$)
Fig.10 Visualizations of chance-constrained programming models ($\rho_{w_1 w_2} = -0.9$)

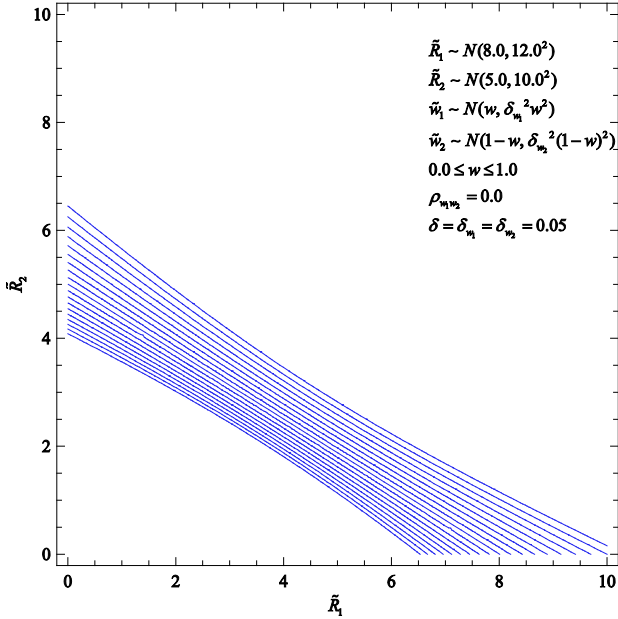


図 9 機会制約条件モデルによる視覚化 ²⁷⁾
($\rho_{w_1 w_2} = 0.0$)
Fig.9 Visualizations of chance-constrained programming models ($\rho_{w_1 w_2} = 0.0$)

また、相関係数 $\rho_{\tilde{w}_1 \tilde{w}_2}$ の値が図 8 から図 10 と異なる場合でも図 8 から図 10 の傾向からバラツキの様子を予測できる。このように、投資比率間の不確実性として相関関係についても考慮することは重要かもしれない。

6.2 平均分散モデルにおける信頼楕円体

一方で、投資比率を対角行列 $\mathbf{W} = \text{diag}[w_i]$ と置くととき、平均分散モデルのリターンの同時分布上の信頼楕円体は

$$\begin{aligned} & (\bar{\mathbf{R}} - \mathbf{WE}(\bar{\mathbf{R}}))^T (\mathbf{WVW})^{-1} (\bar{\mathbf{R}} - \mathbf{WE}(\bar{\mathbf{R}})) \\ & = \lambda_{SDM}^2 \end{aligned} \quad (77)$$

と記述できる ²⁷⁾。ここに、 λ_{SDM} は正規分布の片側確率点である。

式(77)を用いるとき、機会制約条件モデルと同様の傾向を示しながら、各投資比率における信頼楕円体の振舞いが図 11 から図 13 のように視覚化できる。このとき、図 11 から図 13 には、確率変数 R_1 の投資比率を w 、確率変数 R_2 の投資比率を $1-w$ として、 w を 0.1 から 0.9 まで 0.1 ずつ増加させた傾向をそれぞれ図示している。

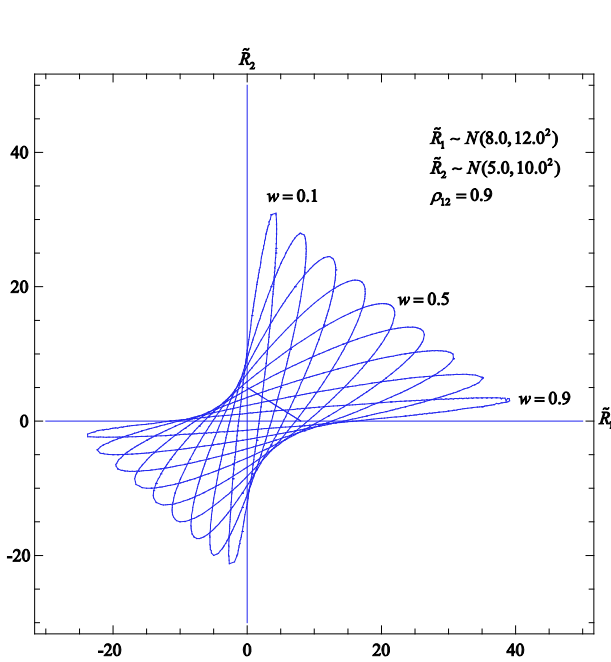


図 11 平均分散モデルの信頼楕円体 ²⁷⁾ ($\rho_{12} = 0.9$)
 Fig.11 Confidence ellipsoids of mean-variance models
 ($\rho_{12} = 0.9$)

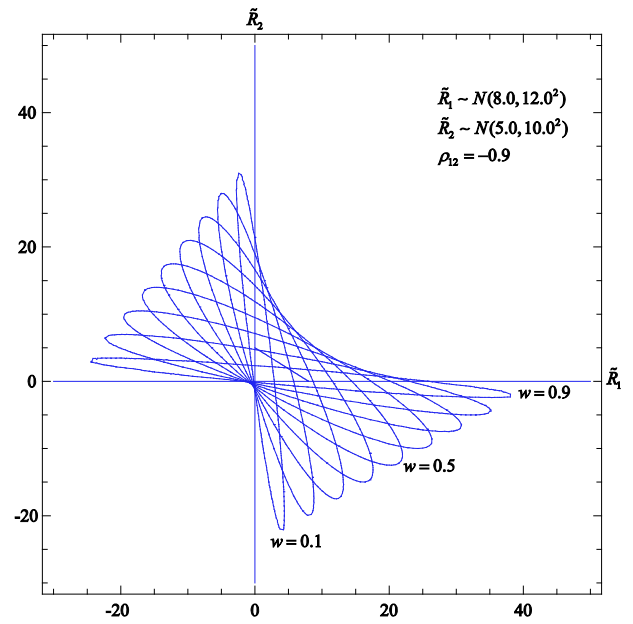


図 13 平均分散モデルの信頼楕円体 ²⁷⁾ ($\rho_{12} = -0.9$)
 Fig.13 Confidence ellipsoids of mean-variance models
 ($\rho_{12} = -0.9$)

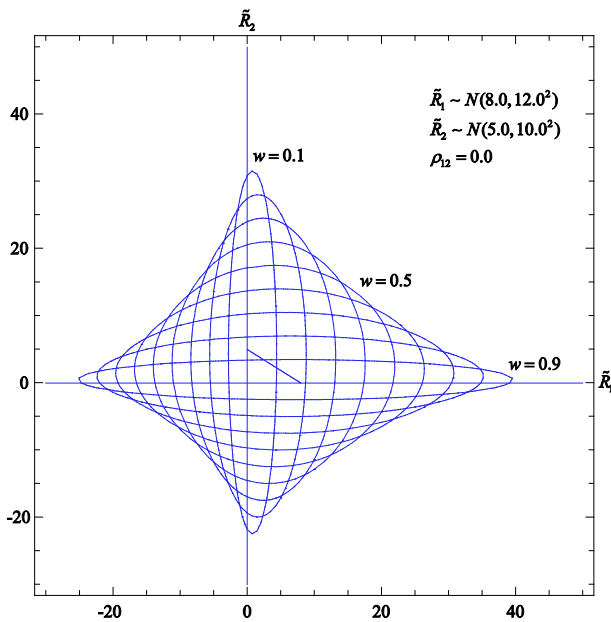


図 12 平均分散モデルの信頼楕円体 ²⁷⁾ ($\rho_{12} = 0.0$)
 Fig.12 Confidence ellipsoids of mean-variance models
 ($\rho_{12} = 0.0$)

ここで、図 11 では、確率変数 R_1 と R_2 の相関係数 $\rho_{R_1 R_2} = 0.9$ の場合を取扱っている．図 12 では、確率変数 R_1 と R_2 の相関係数 $\rho_{R_1 R_2} = 0.0$ の場合を取扱っている．図 13 では、確率変数 R_1 と R_2 の相関係数 $\rho_{R_1 R_2} = -0.9$ の場合を取扱っている．このようにそれぞれ相関関係を視覚化できる．また、相関係数 $\rho_{R_1 R_2}$ の値が図 11 から図 13 と異なる場合でも図 11 から図 13 の傾向から予測でき、確率変数間の相関係数に対する同時分布の特徴がわかる．

この結果、機会制約条件モデルよりも、投資比率が明確に異なる同時分布の信頼楕円体のパフォーマンスは、**WVW** を考慮している点で、平均分散モデルの不確実性を忠実に表現できていることになる．

また、再度記述するが、図 11 から図 13 では投資比率が確定的として視覚化されているにもかかわらず、投資比率の不確実性を考慮しなくとも、平均分散モデルのリスク低減効果は相関係数の大きさにより同時分布の信頼楕円の形状の変化として視覚化できる．

これに、図 8 から図 10 の投資比率の不確実性を加えて信頼楕円体の中心座標が揺れるのが現実の投資スタイルではないかと考えられる．

7. データ分析

図 14 は、1990 年 1 月から 2009 年 12 月までの 20 年間に渡る株価上昇率の上位 50 証券を選択後、その中のシャープ・レシオが上位 10 証券である平均分散モデルの効率的フロンティアを図示したものである。同時に、後頁の付録図 A に計量した 20 年間の期間中、各計量期間を 60 か月である 5 年間に限定した平均分散モデルの傾向を 1 か月ごとに移動させて比較できるよう視覚化している。

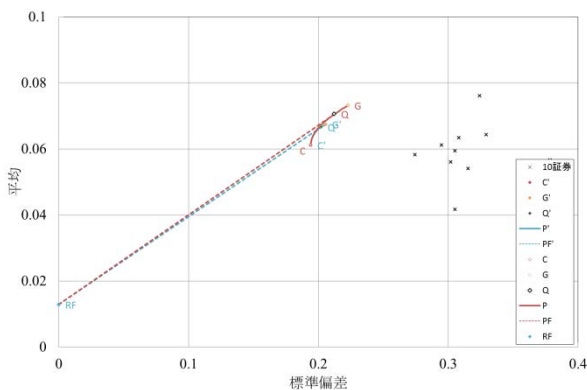


図 14 1990 年 1 月から 2009 年 12 月までの 20 年間の株価上昇率上位 50 証券中、シャープ・レシオ上位 10 証券の効率的フロンティア

Fig.14 Efficient frontiers of portfolios of the top 10 ratings of Sharpe ratios in the top 50 ratings of expected returns of stock prices from January 1990 to December 2009

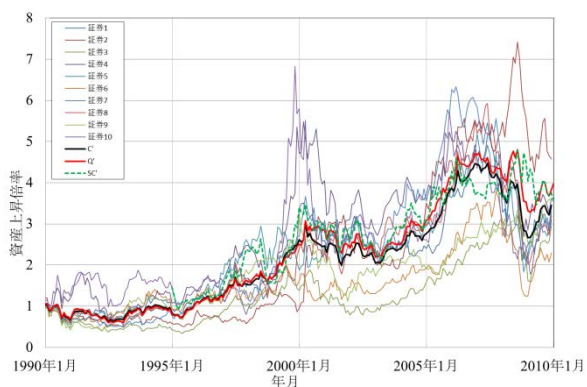


図 15 1990 年 1 月から 2009 年 12 月までの 20 年間の証券 10 証券と最小分散ポートフォリオと接点ポートフォリオの資産上昇倍率推移図

Fig.15 Assets growth rates of tangency portfolios or minimum variance portfolios with 10 securities from January 1990 to December 2009

同様に、同期間の時系列資産の上昇倍率を視覚化すると、図 15 のように図 14 に用いられた 10 証券が、好不況の推移とともに着実に上昇した傾向がわかる。また、図 14 の傾向のように長期間安定的に株価上昇を収めた証券を選定しているため、図 14 の効率的フロンティアは、計量期間を 5 年間に限定した効率的フロンティアとして付録図 A に示す個々の効率的フロンティアと比較しても小さな範囲に収まっていることもわかる。図 15 にはポートフォリオ Q' を赤色実線で、C' を黒色実線で示し、時系列な資産の上昇推移と同時に分散投資によるリスク低減効果も視覚化できている。

さらに、図 14 では空売りの有無に関わらず、ポートフォリオ C と C' は一致しており、このことは空売りを認めない場合の最小分散ポートフォリオの証券投資比率を示す図 16 と、空売りを認める場合の証券投資比率を示す図 17 の縦軸の投資比率 35 番からも理解できる。図 16 では、空売りを認めない場合のポートフォリオ G' を縦軸の証券投資比率 1 番に、ポートフォリオ C' を縦軸の投資比率 35 番に示し、その間の期待収益率を等分割し、ポートフォリオ P' の投資比率を示している。図 17 では、期待収益率がポートフォリオ G' とポートフォリオ C' の間を図 16 と同じ期待収益率の位置に設定し、ポートフォリオ P の投資比率を示している。この図 16 と図 17 から空売りの有無の影響が比較的小さいことが付録図 A と比較してもわかる。

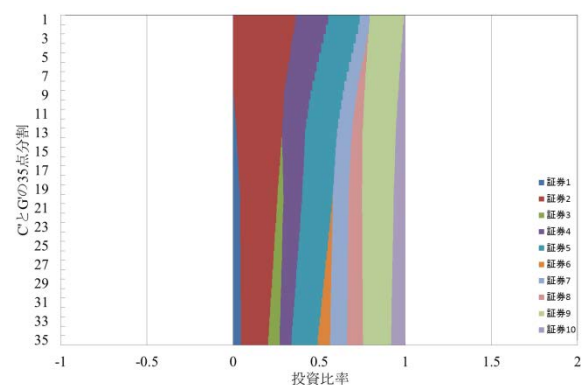


図 16 1990 年 1 月から 2009 年 12 月までの 20 年間のポートフォリオ G' からポートフォリオ C' までの投資比率 (空売りなし)

Fig.16 Investment ratios between portfolios C' and portfolios G' for 20 years from January 1990 to December 2009 (without short position)

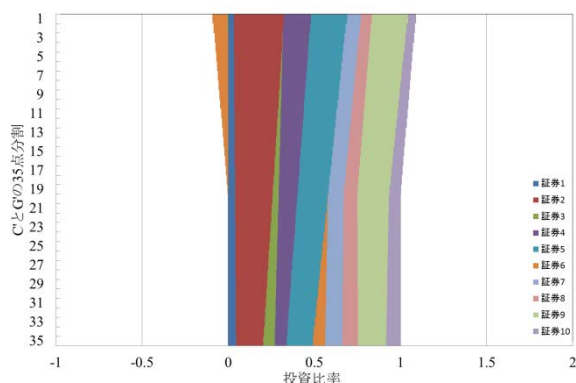


図 17 1990 年 1 月から 2009 年 12 月までの 20 年間のポートフォリオ G' とリターンの同じポートフォリオからポートフォリオ C' までの投資比率(空売りあり)

Fig.17 Investment ratios between the same returns of portfolios C' and portfolios G' for 20 years from January 1990 to December 2009 (with short position)

7.1 計量期間 5 年ごとの平均分散モデルの推移

ところで、付録図 A には、1995 年 1 月から 2009 年 12 月までの 15 年間の各時点で直近 5 年間、すなわち 60 か月間の計量期間をもとに平均分散モデルのパフォーマンス評価のために、それぞれ 4 つの図を示している。具体的には付録図 A の左側から、(a)効率的フロンティア、(b)資産上昇倍率の時系列傾向、(c)空売りを認めない場合の投資比率、(d)空売りを認める場合の投資比率の 4 図を 1 か月ごとに時点を移動させて比較のために図示している。(c)と(d)の縦軸の設定は、図 16 と図 17 と同様にそれぞれのポートフォリオ G' とポートフォリオ C' の期待収益率を等分割して示したものである。

特記すべき点として、この期間中で、計量期間が 1990 年 1 月から 1994 年 12 月までのポートフォリオ C' の期待収益率 $\mu_{C'}$ が安全資産利子率 R_F より小さいために CML の描画が図 7 のように示されていないことが確認できる。

ところで、付録図 A において空売りのない場合のポートフォリオ Q' の投資比率が、時系列に対してどのように変化するかを図示したものが図 18 である。同様にポートフォリオ Q' と同じ期待収益率 $\mu_{Q'}$ を示すポートフォリオ P の投資比率の時系列推移を示したものが図 19 である。

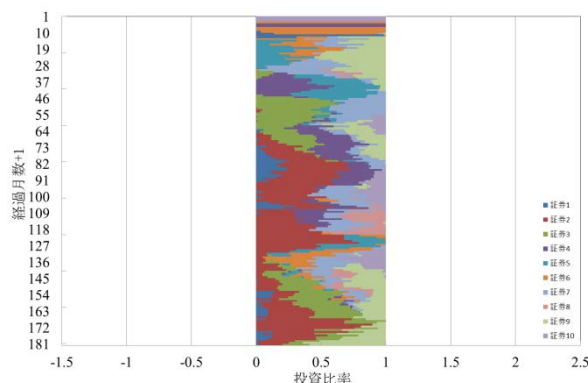


図 18 1995 年 1 月から 2009 年 12 月における直近 60 か月間のポートフォリオ Q' の投資比率の推移(空売りなし)

Fig.18 Trends in investment ratios of portfolio Q' of the last 60 months from January 1995 to December 2009 (without short position)

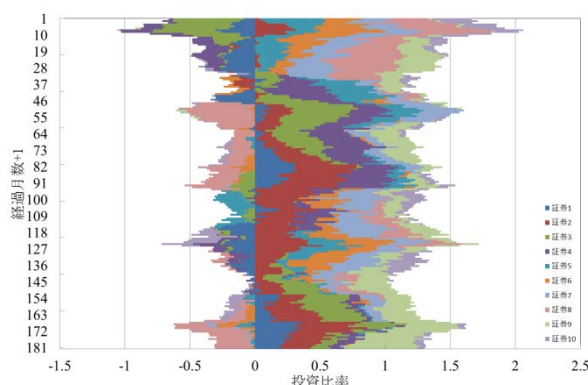


図 19 1995 年 1 月から 2009 年 12 月における直近 60 か月間のポートフォリオ Q' と同じリターンの投資比率の推移(空売りあり)

Fig.19 Trends in investment ratios of portfolio returns same as Q' of the last 60 months from January 1995 to December 2009 (with short position)

これらは、本来ならば定期的に 1 年後にパフォーマンス評価を行うように実施時期を設定すべきだが、取引コスト²³⁾³¹⁾⁴⁰⁾のないリバランスをできるだけ多く実施したアクティブ運用の実施結果を計量するために、1 か月ごとに計量し直しリバランスするアクティブ運用を検討して視覚化している。この条件のもとで、図 18 に示す投資比率の変化に従うリバランスを実施し、計量期間の直後の 1 か月後のパフォーマンスを調べたものを図 15 上に緑色破線として描いている。

しかしながら、想定していたパフォーマンスは得られず、ポートフォリオ Q' と同等の結果を最終的に得る

ような傾向が得られた。このため、この期間中に計量したデータからはリバランスによるアクティブ運用の計量予測値は優れていたものの、その直後の1か月後の計量結果のパフォーマンスからは証明できなかったといえる。このような不確実性を調べるため、7.3では統計量について平均分散モデルの計量期間をもとに考察している。その前に、次節では平均の算術方法による違いと平均分散モデルの不確実性について取扱う。

7.2 算術平均と対数平均による平均分散モデルの比較

本節では、算術平均による平均分散モデルと対数平均による平均分散モデルの実施例を比較する。具体的には、図20のように1995年1月から2000年12月までの5年間の計量期間の両者の効率的フロンティアを描いたものを同時に図示している。

同じ期間の株価から図示したにも関わらず、式(1)による騰落率の算術平均と式(5)による騰落率の対数平均による平均分散モデルを用いたかで両者は別物である。このため、ポートフォリオの計量結果だけを確認するのではなく、計量プロセスの違いも十分に認識して投資の意思決定を行うことが重要である。

また、図20に橙色の破線で示すように算術平均を用いた期待効用ポートフォリオを描いたが、本研究で取扱う対数平均を用いる平均分散モデルとは平均算出の取扱いの違いで対象とする効率的フロンティアが大きく異なることがわかる。

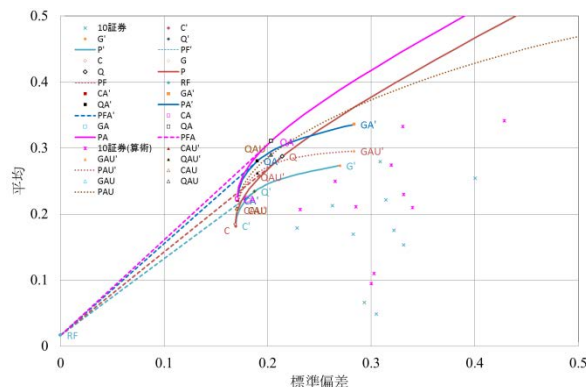


図20 算術平均と対数平均のポートフォリオの効率的フロンティアの対比(計量期間: 1995年1月から1999年12月までの60か月間月次データより年率変換)

Fig.20 Comparisons of efficient frontiers of portfolios of logarithmic mean and arithmetic mean (Annual rates converted by monthly data for 60 months from January 1995 to December 1999)

7.3 統計量と平均分散モデルの比較

今野と鈴木ら³⁵⁾は歪度まで考慮するモデルを考察している。そこで、平均分散モデルについて計量期間中に統計量である平均、標準偏差、歪度、超過尖度による影響がどの程度かを調べる。すなわち、図15に示すように20年間の時間推移の中で経済的なイベントによる影響がいくらか確認できる。このため、本節では60か月ごとの計量期間の基本統計量への影響を考察する。

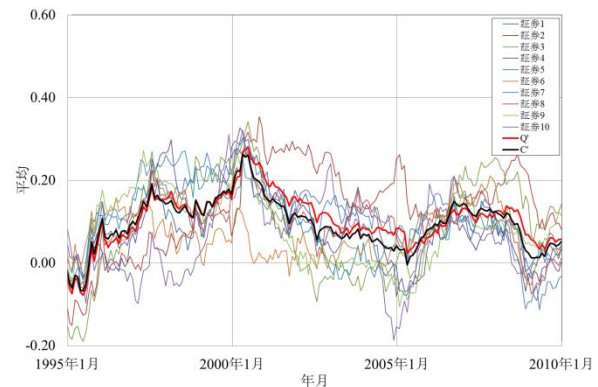


図21 10証券とポートフォリオQ'とポートフォリオC'の平均の推移

Fig.21 Trends in the average of portfolio C', portfolio Q' and 10 securities

まず、図21に示す平均の傾向であるが、図22に示す標準偏差よりも値の変化の頻度は大きい。このため、この傾向が投資比率の時間推移にも影響を及ぼしていることがわかる。したがって、個別の証券の平均の変化の大きさから図18と図19のように投資比率が安定しないことがわかる。また、図22からわかるようにポートフォリオQ'とポートフォリオC'の標準偏差は投資対象の10証券のそれぞれのバラツキの変化よりも小さく安定している。このことは平均分散モデルを活用するために大変重要な特徴である。

ところで、式(15)と式(16)で示した標本数 k を意味する T で割る歪度と超過尖度は、Excelの標準関数SUMPRODUCTを用いたユーザ定義関数として活用しても良いし、もしくは直接Cellに入力して

$$\begin{aligned} \text{歪度} = & \text{SUMPRODUCT}(\text{ } \\ & \mathbf{x} - \text{AVERAGE}(\mathbf{x}), \\ & \mathbf{x} - \text{AVERAGE}(\mathbf{x}), \\ & \mathbf{x} - \text{AVERAGE}(\mathbf{x})) \\ & / \text{COUNT}(\mathbf{x}) \\ & / \text{STDEV.P}(\mathbf{x})^3 \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \text{超過尖度} = & \text{SUMPRODUCT}(\text{ } \\ & \mathbf{x} - \text{AVERAGE}(\mathbf{x}), \\ & \mathbf{x} - \text{AVERAGE}(\mathbf{x}), \\ & \mathbf{x} - \text{AVERAGE}(\mathbf{x}), \\ & \mathbf{x} - \text{AVERAGE}(\mathbf{x})) \\ & / \text{COUNT}(\mathbf{x}) \\ & / \text{STDEV.P}(\mathbf{x})^4 - 3 \end{aligned} \quad (79)$$

ただし

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \{x_1, \dots, x_n\}^T \\ T &= \text{COUNT}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (80)$$

と表記して活用できる。ここで、式(80)の \mathbf{x} は、計量する値の配列を意味する。

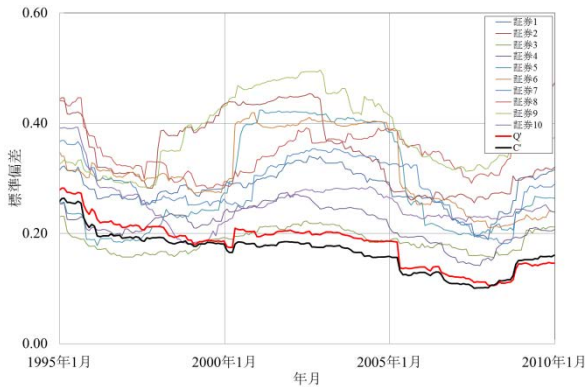


図22 10証券とポートフォリオQ'とポートフォリオC'の標準偏差の推移

Fig.22 Trends in the standard deviation of portfolio C', portfolio Q' and 10 securities

式(78)と式(79)では、標本数 T で割っているが、Excelの標準関数では、歪度と超過尖度は

$$\text{Skew}(\mathbf{R}) = \frac{T^2}{(T-1)(T-2)} \frac{m_3}{s^3} \quad (81)$$

$$\text{Kurt}(\mathbf{R}) = \frac{T^2}{(T-1)(T-2)(T-3)} \cdot \frac{(T+1)m_4 - 3(T-1)m_2^2}{s^4}$$

ただし

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R}_t)^k \\ s_k &= \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R}_t)^2} \\ \mathbf{R} &= \{R_1, \dots, R_n\}^T \end{aligned} \quad (82)$$

なので、式(78)と式(79)と比較すると若干の差異を含んでいる。ただし、このとき \mathbf{R} は騰落率のデータを示すセル配列である。これまでの計量期間は60か月間なので、 $T = 60$ である。また、歪度と超過尖度に関する式(81)と式(78)の差異は T に依存している。

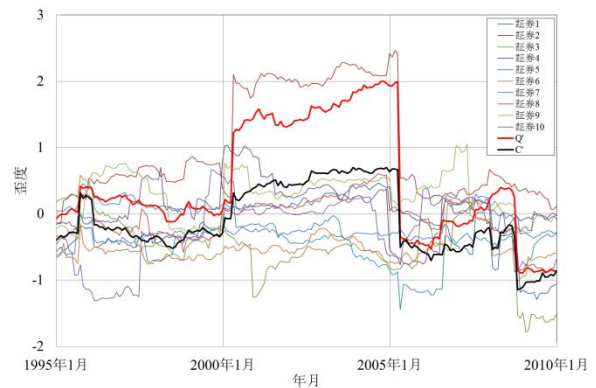


図23 10証券とポートフォリオQ'とポートフォリオC'の歪度の推移

Fig.23 Trends in the skewness of portfolio C', portfolio Q' and 10 securities

一方、図22の標準偏差、図23の歪度、図24の超過尖度からは、時系列データの計量期間が重なる期間の影響が明確に表われ、値の変化が連動している様子がわかる。すなわち、2000年5月から2005年4月までの間で特定の証券の歪度と超過尖度が大きくなっている。このことと同様に標準偏差でも影響が出ているが、ポートフォリオQ'とポートフォリオC'の標準偏差には、分散投資によるリスク低減効果も示されている。

したがって、歪度と超過尖度の分母に標準偏差があるため、これらの値の大きさへの影響が明確に表われている。この傾向については、図 23 と図 24 に視覚化された特徴からも再確認できる。

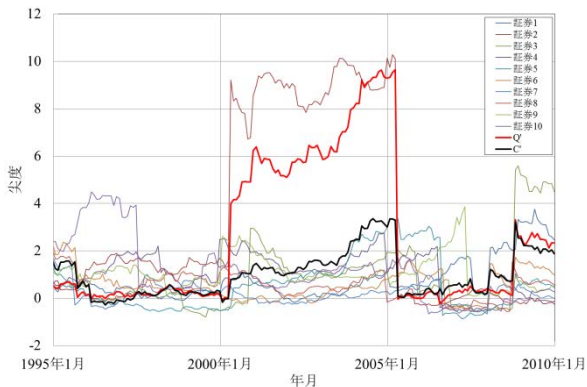


図 24 10 証券とポートフォリオ Q' とポートフォリオ C' の超過尖度の推移

Fig.24 Trends in the kurtosis of portfolio C', portfolio Q' and 10 securities



図 25 ユーザ定義と Excel 標準関数の歪度の比較

Fig.25 Comparisons of skewness of both user definition function and Excel standard function

さらに、この計量期間に対する歪度を図 25 にユーザ定義関数と Excel 標準関数として図示している。両者の計算結果はほとんど誤差がない。すなわち、両者の相対誤差は約 2.52% で一定である。これに対して、超過尖度は、図 26 に示されるように値が大きいほど、ユーザ定義関数と Excel 標準関数の誤差が大きく、場合により相対誤差の取扱いには注意を要する。このため標本数を考慮し、ユーザ定義関数は使用することが望ましい。



図 26 ユーザ定義と Excel 標準関数の超過尖度の比較

Fig.26 Comparisons of kurtosis of both user definition function and Excel standard function

本節では、計量期間 $T = 60$ の平均分散モデルに対する統計量について調査したが、対数平均を用いる平均分散モデルの平均は、計量期間において証券価格の期首価格と期末価格による騰落率の算出のために、付録図 A と図 21 から図 26 までの傾向より投資比率が安定しないことが改めてわかる。また、高次統計量は計量期間を時系列で重複する場合には同じ要因でしばらくの期間、同じ傾向が連動することも理解できる。したがって、統計処理を行う場合には、対象とする計量期間について適切に分割を設定しながら実施することが望ましい。

7.4 時系列傾向と平均分散モデルの考察

7.3 では歪度と超過尖度を含めて同期間を比較する分析を実施した。石島と内田ら³⁰⁾は、自己相関の有無に関するモデルを紹介している。そこで、本節では 1995 年 1 月から 2009 年 12 月までの直近 60 か月間のそれぞれの計量期間の時系列の影響を考察するために自己相関係数を計算する。

たとえば、 k 次の自己共分散は Excel の標準関数 SUMPRODUCT を用いてユーザ定義関数を活用するか、もしくは直接に Cell 入力して

$$k \text{ 次の自己共分散} = \frac{\text{SUMPRODUCT}(\mathbf{x}_1 - \text{AVERAGE}(\mathbf{x}), \mathbf{x}_2 - \text{AVERAGE}(\mathbf{x}))}{\text{COUNT}(\mathbf{x})} \quad (83)$$

ただし

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= \{x_1, \dots, x_n\}^T \\
 \mathbf{x}_1 &= \{x_1, \dots, x_{n-k}\}^T \\
 \mathbf{x}_2 &= \{x_{k+1}, \dots, x_n\}^T
 \end{aligned} \tag{84}$$

である．ここで， $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ は計量に用いられる値のセル配列である．

式(83)と式(84)を用いて，図 27 から図 31 にそれぞれ 1 次自己相関係数から 5 次自己相関係数について計量期間中の傾向を図示している．



図27 ポートフォリオQ'とポートフォリオC'の1次自己相関係数の推移

Fig.27 Trends in first order autocorrelation function of portfolio C' and portfolio Q'



図28 ポートフォリオQ'とポートフォリオC'の2次自己相関係数の推移

Fig.28 Trends in second order autocorrelation function of portfolio C' and portfolio Q'

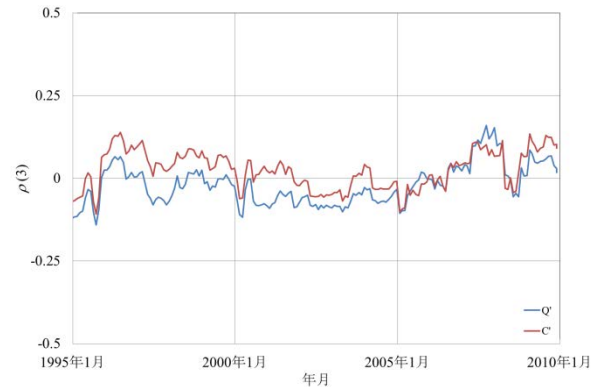


図29 ポートフォリオQ'とポートフォリオC'の3次自己相関係数の推移

Fig.29 Trends in third order autocorrelation function of portfolio C' and portfolio Q'

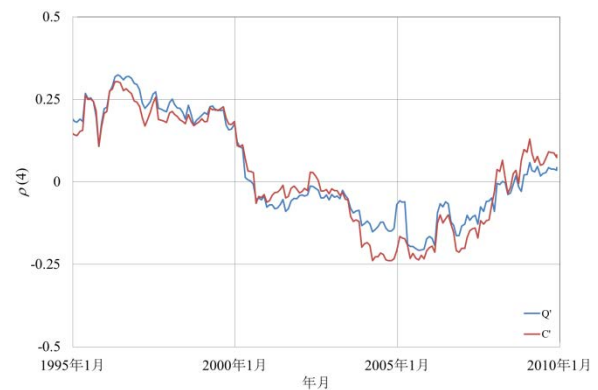


図30 ポートフォリオQ'とポートフォリオC'の4次自己相関係数の推移

Fig.30 Trends in fourth order autocorrelation function of portfolio C' and portfolio Q'

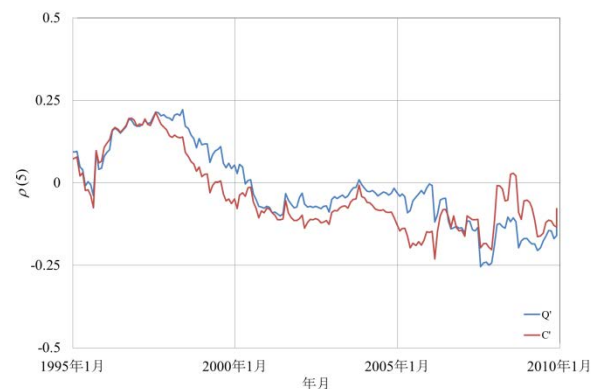


図31 ポートフォリオQ'とポートフォリオC'の5次自己相関係数の推移

Fig.31 Trends in fifth order autocorrelation function of portfolio C' and portfolio Q'

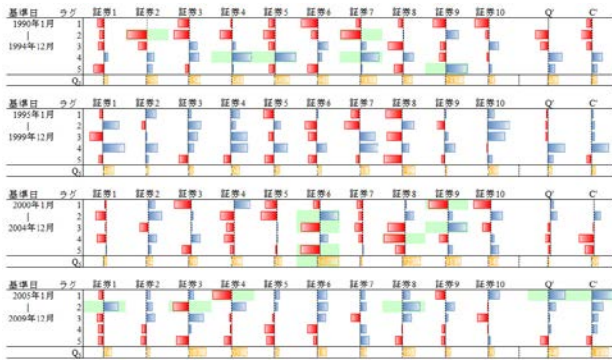


図 32 自己相関係数のコレログラム

Fig.32 Comparisons of correlogram of autocorrelation functions

計算結果と図 27 から図 31 までの傾向より、全体的には 1 次自己相関係数, 2 次自己相関係数, 3 次自己相関係数の順に少しずつ減衰している様子がわかる。これに対し, 4 次自己相関係数と 5 次自己相関係数は, 3 次自己相関係数より大きい結果が得られている可能性がある。

そこで, 10 証券とポートフォリオ Q' と C' について, 1990 年 1 月から 1994 年 12 月まで, 1995 年 1 月から 1999 年 12 月まで, 2000 年 1 月から 2004 年 12 月まで, 2005 年 1 月 2009 年 12 月までの 5 年ごとに 4 分割し, 図 32 に示すようにコレログラム(本来は縦軸と横軸の表示は逆表示)の図示を試みている。

このとき, 図 32 では有意となる臨界値 ± 0.25 を超える場合には, 薄緑色で背景を表示している。また, 検定として式(24)の Ljung-Box 統計量 Q_5 を算出し, 図 32 のコレログラムの下に値の大きさのイメージを黄土色で表示している。個別証券では時系列への影響はそれぞれに確認されているが, 図 32 からポートフォリオへの影響は小さくなっていることが確認できる。

7.5 同時分布と平均分散モデルの考察

一方で, 平均分散モデルと同時分布もしくは散布図の比較調査も重要である。そこで, 付録図 B に示すように 1995 年 1 月から 2009 年 12 月までの直近 60 か月間のポートフォリオ Q' とポートフォリオ C' の同時分布について 1 か月ごとの時間推移を図示している。そして, 空売りなしの場合を左図の散布図として記載している。同時に, 右図にはポートフォリオ Q' とポートフォリオ C' が同じ平均の空売りがある場合の散布図の傾向として図示している。付録図 B の散布図と図 11 の同時分布の傾向は相関係数の値の大きさが近いので, 同様の傾向を示すことがわかる。しかし, 一方で前節までで考察した統計量の不確実性や時系列の不確実性について, バラツキの様子がそれぞれの計量期間の特徴として表れていることもわかる。

また, 6 章でも記述したとおり, 実際にはこれに投資比率の不確実性を考慮する必要があるかもしれない。

以上から実際の運用には計量期間の直後に, 理論値に基づく証券投資比率どおり売買を行うことは難しいことがわかる。このため, 当月の高値と安値を参考値に騰落率への影響を考察する。すなわち, 高値と安値の騰落率に影響する度合いとして

$$\begin{aligned} \text{高値率} - \text{安値率} &= \log \left(\frac{\text{当月高値}}{\text{前月終値}} \right) \\ &\quad - \log \left(\frac{\text{当月安値}}{\text{前月終値}} \right) \end{aligned} \quad (85)$$

なる指標を定義する。図 33 では, この高値率-安値率と騰落率の時系列を図示している。

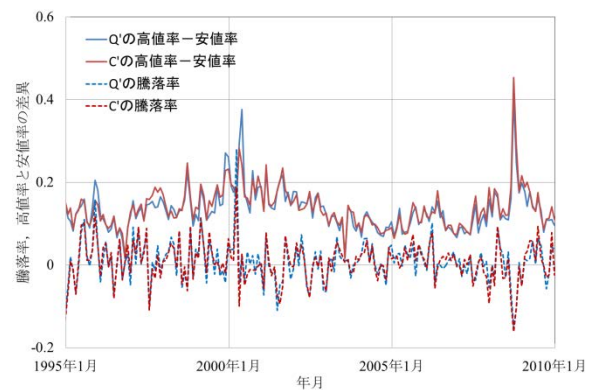


図 33 高値率と安値率の差異と騰落率の比較

Fig.33 Comparisons of returns and differences of rates of high prices and low prices

図 33 上に図示は実施していないが, 個別の 10 証券の傾向も大体同じ傾向である。経済的なイベントの前後の高値と安値の差異が大きくなる傾向があり, 翌月内に実施するポートフォリオのリバランスがある場合, 計画通りに執行できない可能性がある。実際には手数料³¹⁾を含む取引コスト²³⁾⁴⁰⁾も考慮する必要がある, この不確実性についても見積もることが重要である。

以上, 平均分散モデルの不確実性に関して多岐にわたり確認できるのだが, それにもかかわらずにデータ分析を通じて分散投資のリスク低減効果を再確認することができた。

6. 結 論

本研究では、平均分散モデルの数理モデルの再考と Excel による 1990 年 1 月から 2009 年 12 月までのデータ分析を通じて、その特徴や不確実性の考察を実施した。まず、数理モデルを再考し、最小分散ポートフォリオ、接点ポートフォリオ、最適成長ポートフォリオの特徴を再確認できた。そして、同時分布による平均分散モデルの特徴を考察し、不確実性を有するもののリスク低減効果を確認できた。

以上をもとに、計量期間中に得られたデータより、理論とデータの同一の傾向と不確実性について改めて再検証することができた。

謝辞 最後に、本研究の遂行に際し、大阪大学大学院 経済学研究科 大西匡光 教授、大屋幸輔 教授、並びに中央大学大学院 国際会計研究科 石島博 教授から多数の有益な助言を賜ったことを記して感謝の意を表します。また、校閲者からの親切な助言へも謝意を記します。

参考文献

- 1) 中西真悟, "インターネットに公開される株価情報を利用したデータベースの開発とその活用 - 平均分散モデルと資本資産価格モデルへの応用 -", 大阪工業大学紀要理工編, Vol. 55, No. 1, pp. 11-24, 2010.
- 2) バブル高値を抜く 95 社, 地方めだつ, 日経ヴェリタス 2010 年 1 月 10 日号, 日本経済新聞社, p.11, 2010.
- 3) 日本銀行統計時系列データ, <<http://www.boj.or.jp/type/stat/dlong/index.htm>>, 2010 にアクセス.
- 4) Yahoo!ファイナンス <<http://finance.yahoo.co.jp/>>, 2010 にアクセス.
- 5) D. G. Luenberger, *Investment Science*, Oxford University Press, 1998.
- 6) D. G. Luenberger (今野浩, 鈴木賢一, 批々木規雄 訳), 『金融工学入門』, 日本経済新聞社, 2002.
- 7) 田畑吉雄, 『金融工学入門』, エコノミスト社, 2001.
- 8) 田畑吉雄, 『リスク測度とポートフォリオ管理』, 朝倉書店, 2004.
- 9) 竹原均, 『ポートフォリオの最適化』, 朝倉書店, 1997.
- 10) 批々木規雄, 『金融工学と最適化』, 朝倉書店, 2001.
- 11) 批々木規雄, 田辺隆人, 『ポートフォリオ最適化と数理計画法』, 朝倉書店, 2005.
- 12) John Y. Campbell, Andrew W. Lo, Archie Craig Mackinlay, *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, 1996.
- 13) John Y. Campbell, Andrew W. Lo, Archie Craig Mackinlay (祝迫得夫, 大橋和彦, 中村信弘, 本多俊毅, 和田賢治 訳), 『ファイナンスのための計量分析』, 共立出版, 2003.
- 14) 小暮厚之, 照井伸彦, 『計量ファイナンス分析の基礎』, 朝倉書店, 2001.
- 15) Simon Benninga, *Financial Modeling*, The MIT Press, 3rd Edition, 2008.
- 16) Simon Benninga, (ファイナンシャル・モデリング研究会 訳), 『ファイナンシャル・モデリング』, 清文社, 2005.
- 17) Mary Jackson, Mike Staunton, *Advanced Modelling in Finance using Excel and VBA*, The Wiley Finance Series, 2001.
- 18) Mary Jackson, Mike Staunton, (山下恵美子, 近藤正弘, 西麻布俊介 訳), 『EXCEL と VBA で学ぶ先端ファイナンスの世界』, パンローリング, 2004.
- 19) Gunter Loeffler, Peter N. Posch, *Credit Risk Modeling using Excel and VBA*, The Wiley Finance Series, 2nd Edition, 2010.
- 20) Ludwig B. Chincarini, Daehwan Kim, *Quantitative Equity Portfolio Management*, McGraw-Hill, 2006.
- 21) Svetlozer T. Rachev, Stoyan V. Stoyanov, Frank J. Fabozzi, *Advanced Stochastic models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization*, John Wiley & Sons, Inc., 2008.
- 22) Frank J. Fabozzi, Sergio M. Focardi, Petter N. Kolm, *Quantitative Equity Investing*, John Wiley & Sons, Inc., 2010.
- 23) Frank J. Fabozzi, Harry M. Markowitz, *Equity Valuation and Portfolio Management*, John Wiley & Sons, Inc., 2011.
- 24) Jean Luc Prigent, *Portfolio Optimization and Performance Analysis*, Chapman & Hall/CRC, 2007.

- 25) Richard C. Grinold, Ronald N. Kahn, *Active Portfolio Management*, McGraw-Hill, 1995.
- 26) Richard C. Grinold, Ronald N. Kahn (明治生命特別勘定運用部, 日興証券アセットマネジメント本部訳), 『アクティブ・ポートフォリオ・マネジメント』, 東洋経済新報社, 1999.
- 27) 中西真悟, 大西匡光, “同時分布の信頼楕円体を考慮した平均・分散モデルの考察”, 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集 2013, pp. 184-185, 2013.
- 28) 石井博昭, 斎藤誠慈, 森田浩, 『不確実・不確定性の数理』, 大阪大学出版会, 2004.
- 29) 河本薫, 『会社を変える分析の力』, 講談社, 2013.
- 30) 石島博, 内田正樹, “相互相関を考慮した最適なポートフォリオ選択に関する一考察”, 京都大学数理解析研究所, 数理解析研究所講究録, 1736, pp. 147-160, 2011.
- 31) 仲川勇二, 井垣伸子, 伊佐田百合子, 疋田光伯, “離散最適化解法の金融工学への応用 : 年金等の長期運用に役立つ最適化技術の開発を目指して”, オペレーションズ・リサーチ : 経営の科学, Vol. 56, No. 5, 280-285, 2011.
- 32) H. M. Markowitz, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley and Sons, Inc., 1959.
- 33) W. F. Sharpe, "Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk," *Journal of Finance*, Vol. 19, pp. 425-442, 1964.
- 34) 吉田あつし, 福地純一郎; 平均分散モデルにおける最適ポートフォリオのリスク推定, ジャフイー・ジャーナル, 東洋経済新聞社, 2003.
- 35) 今野浩, 鈴木賢一, “平均・分散・歪度モデルについて”, 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集 1993, pp. 242-243, 1993.
- 36) 大川勉, 『コンピュータ金融工学入門 - エクセルとマセマティカによる実践的ポートフォリオの構築 -』, 阿吽社, 2002.
- 37) 藤林宏, 岡村孝, 矢野学, 『EXCEL で学ぶ証券投資分析 - 改訂版 -』, 金融財政事情研究会, 2001.
- 38) 石野雄一, 『道具としてのファイナンス』, 日本実業出版社, 2005.
- 39) 小林孝雄, 芹田敏夫, 日本証券アナリスト協会, 『新・証券投資論 I』, 日本経済新聞出版社, 2009.
- 40) 伊藤敬介, 諏訪部貴嗣, 荻島誠治, 浅野幸弘, 榊原茂樹, 日本証券アナリスト協会, 『新・証券投資論 II』, 日本経済新聞出版社, 2009.
- 41) 菅原周一, 『資産運用の理論と実践』, 朝倉書店, 2007.
- 42) A. D. Roy, "Safety-first and the Holding Assets," *Econometrica*, Vol. 20, pp. 431-449, 1952.
- 43) Ulrich Faigle, W. Kern, Georg Still, *Algorithmic Principles of Mathematical Programming*, Springer, 2002.
- 44) Chi-fu Huang, Robert H. Litzenberger, *Foundations for Financial Economics*, Elsevier Science Ltd, 1988.
- 45) Agnew, N. H., Agnew, R. A., Rasmussen, J. and Smith, K. R., “An application of chance constrained programming to portfolio selection in casualty insurance firm”, *Management Science*, Vol. 15, No.10, pp.B-512-520, 1969.
- 46) 矢野健太郎, 『図形と式』, 講談社, 1979.
- 47) Richard A. Johnson, Dean W. Wichern, *Applied Multivariate Statistical Analysis*, Longman Higher Education, 2nd Revised edition, 1987.
- 48) Richard A. Johnson, Dean W. Wichern, (西田俊夫 訳), 『多変量解析の徹底研究』, 現代数学社, 1992.

付録図A 計量期間 60 か月 ごとの平均分散モデル

(a)効率的フロンティア, (b)資産上昇倍率, (c)投資比率(空売りなし), (d)投資比率(空売りあり)

Appendix Figures A

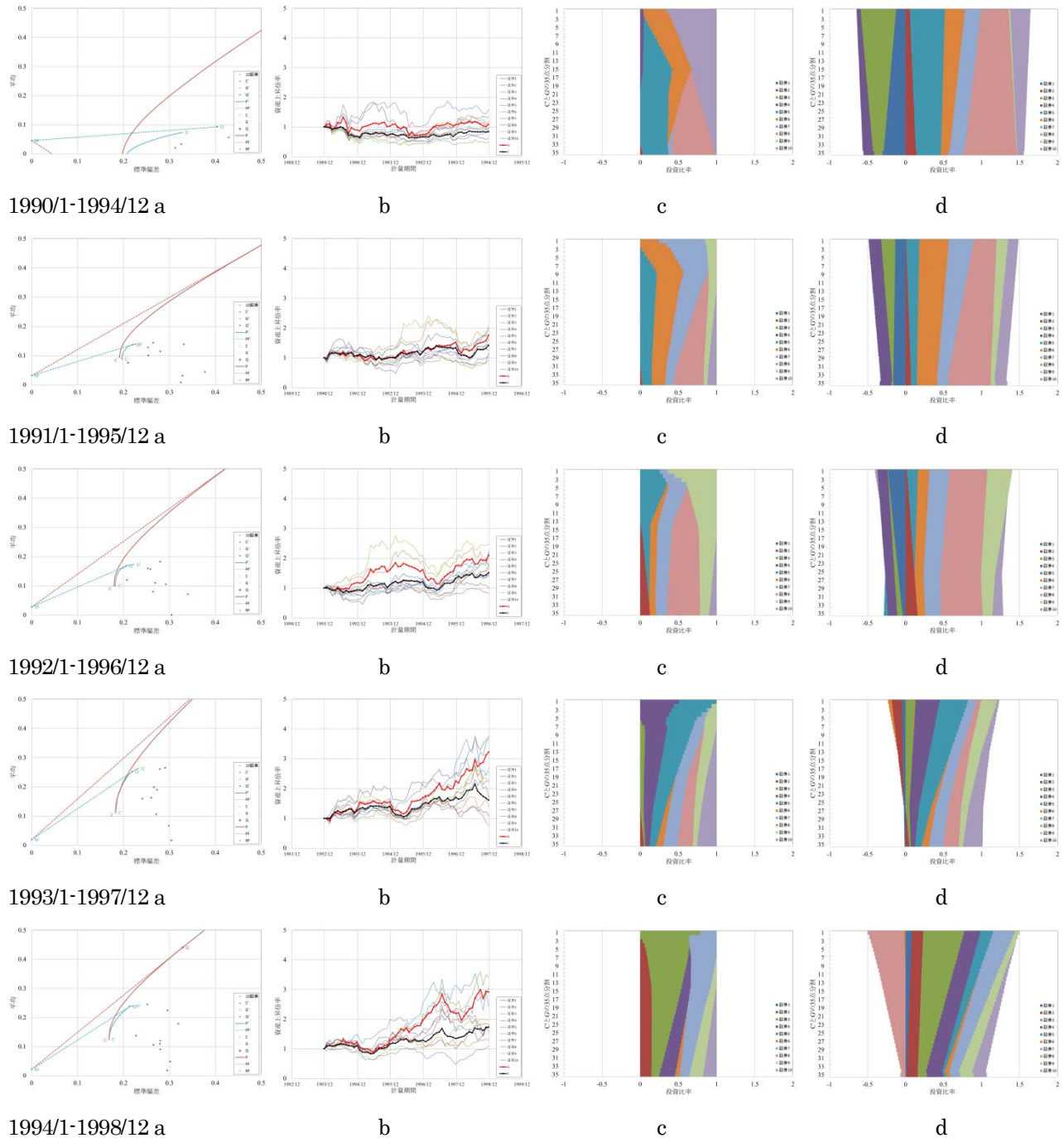
Mean-variance models for 60 months

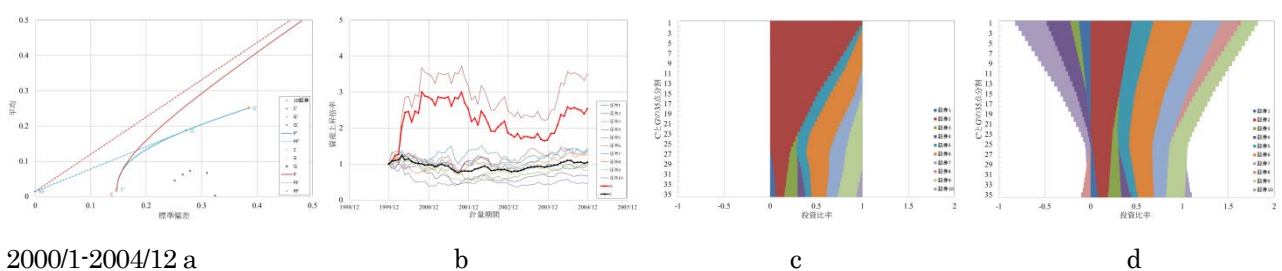
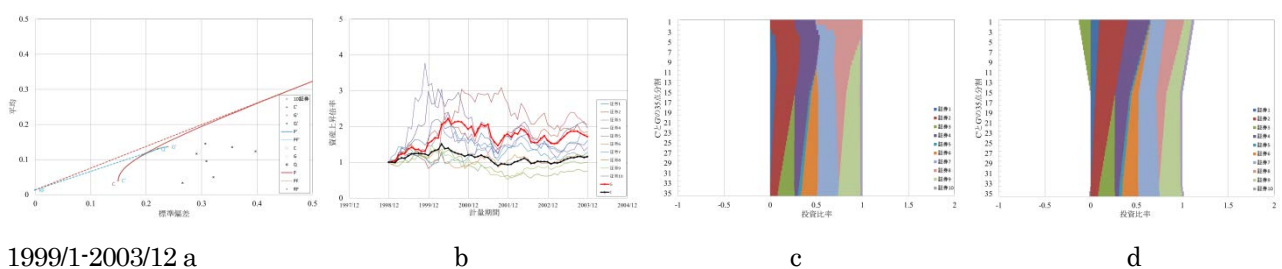
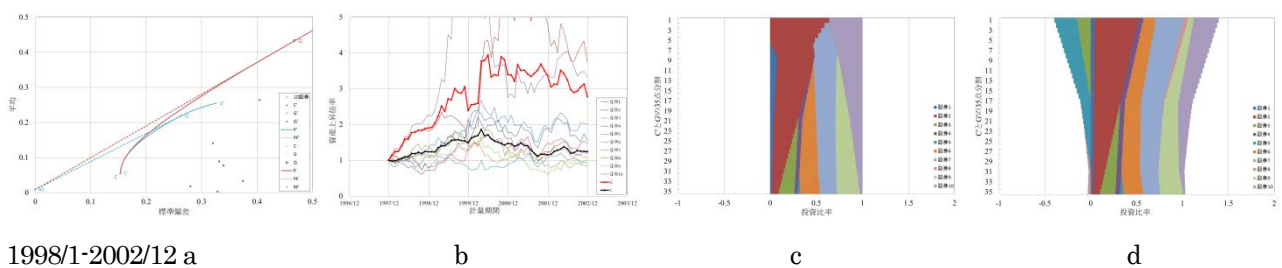
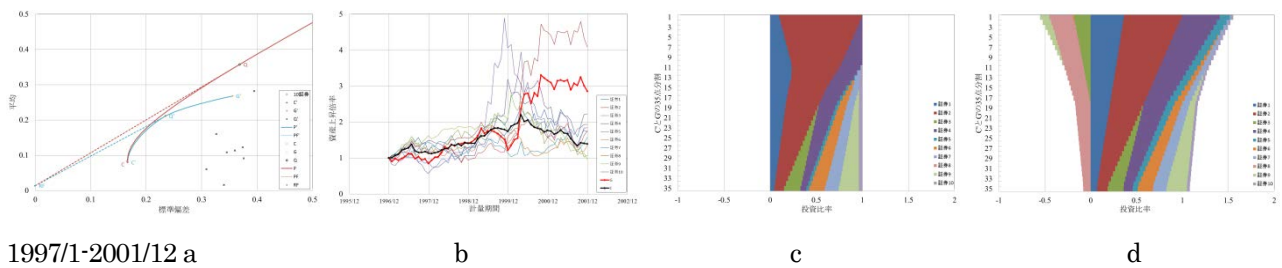
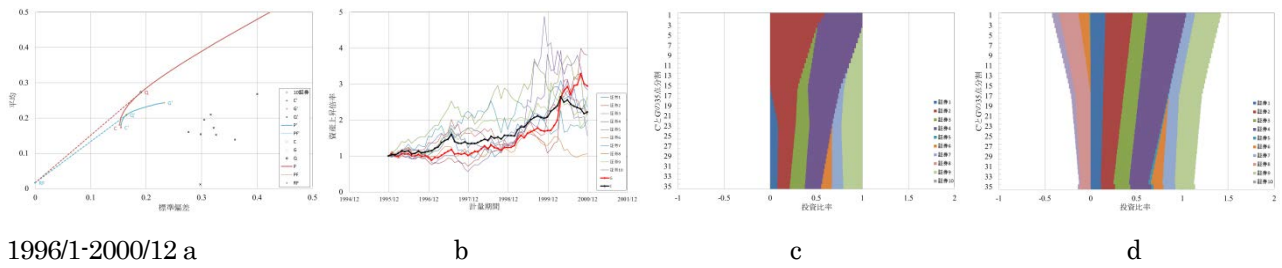
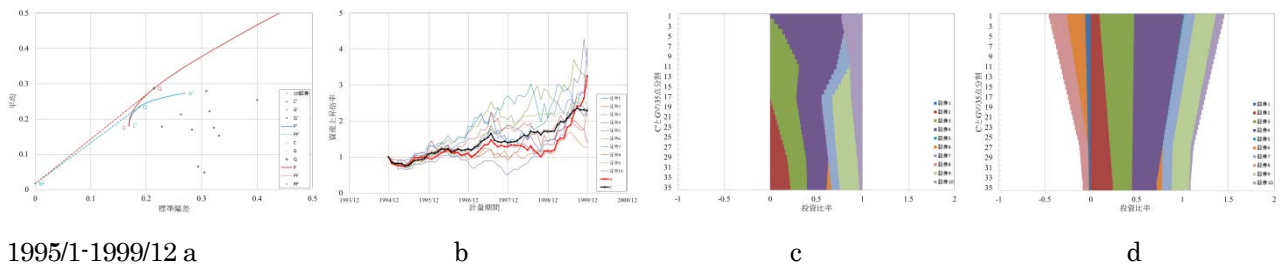
(a) Efficient frontiers of mean-variance models for 60 months,

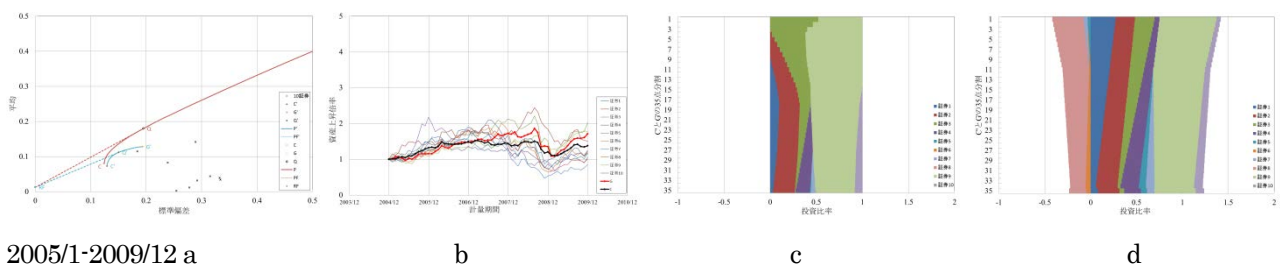
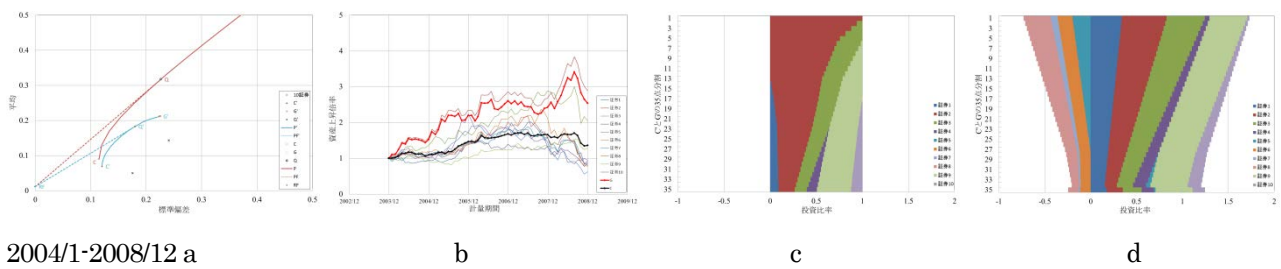
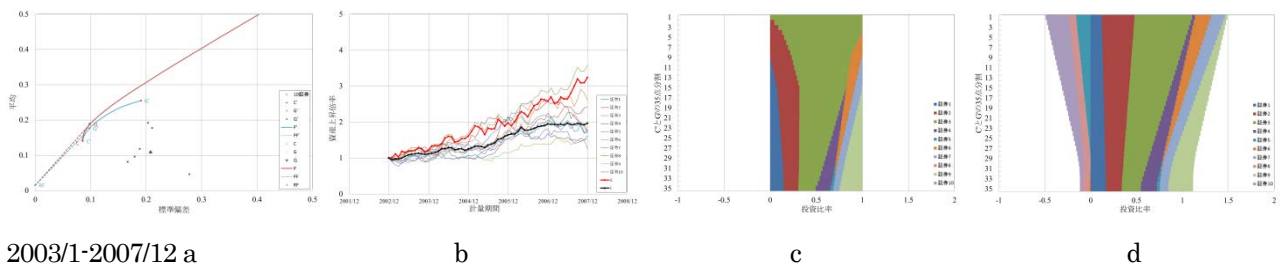
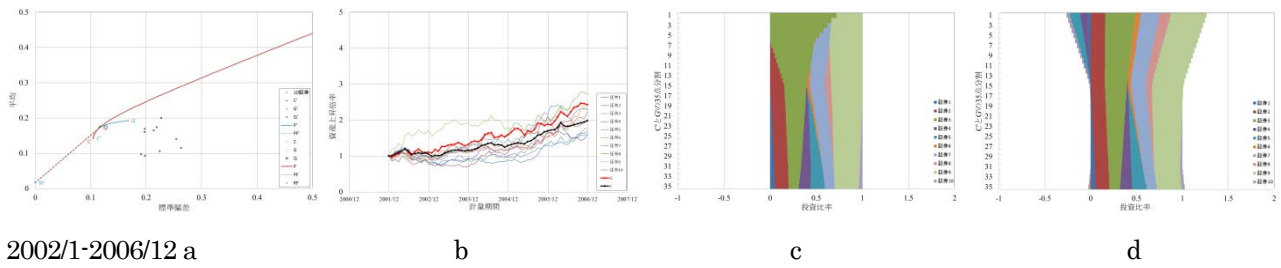
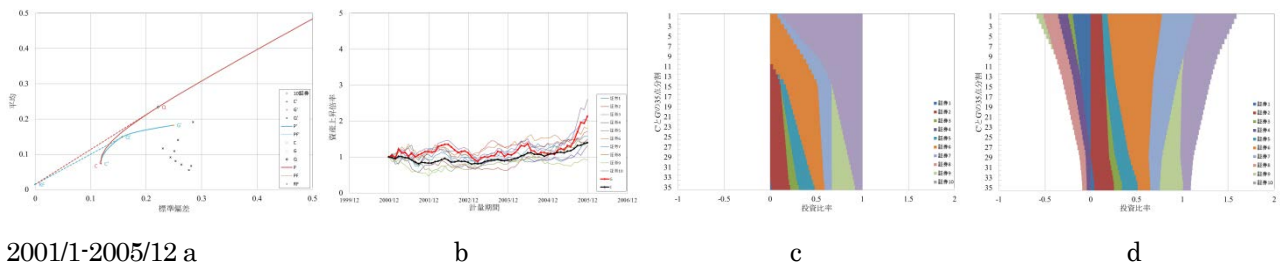
(b) Assets growth rates,

(c) Investment ratios of portfolios (without short position),

(d) Investment ratios of portfolios (with short position)





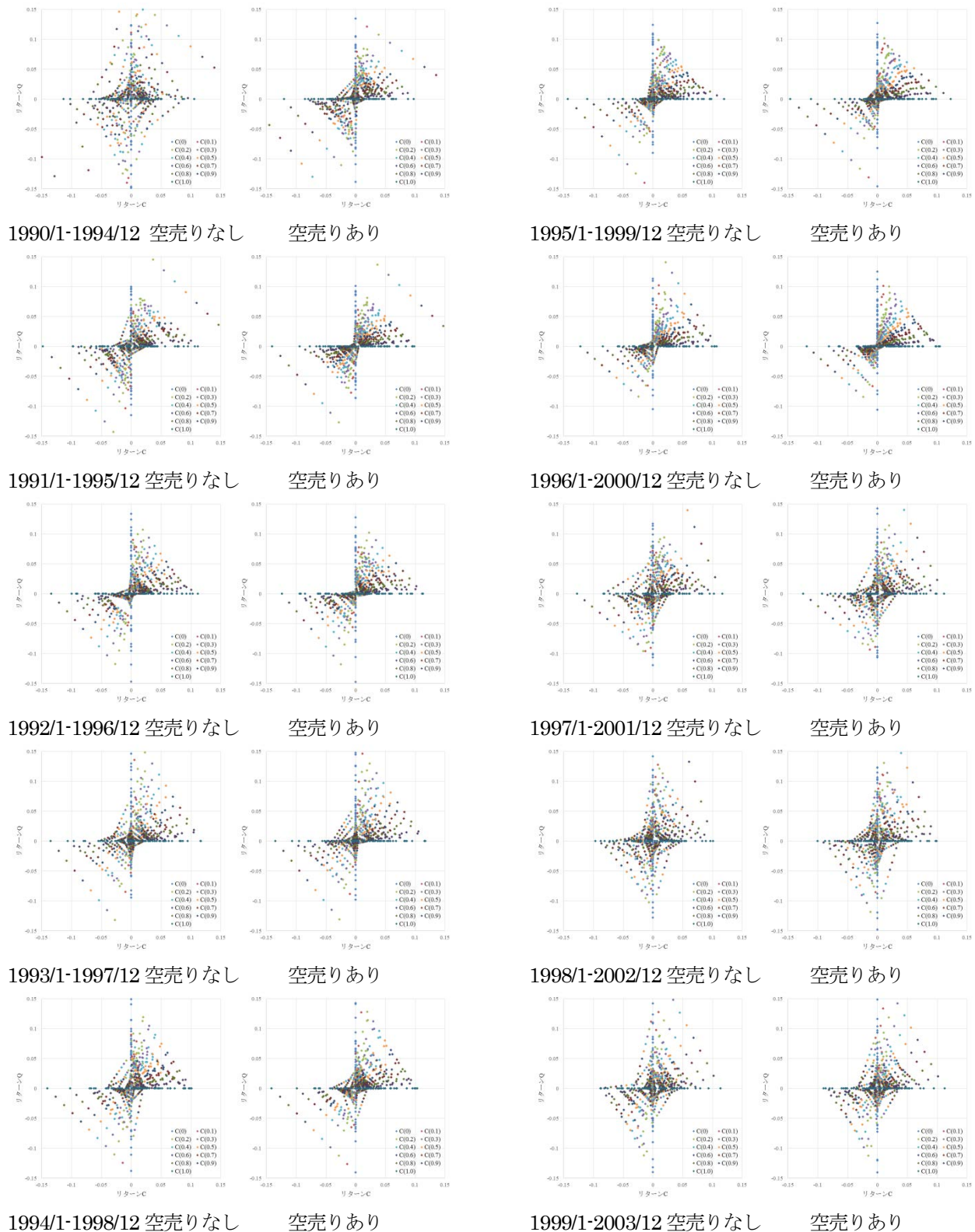


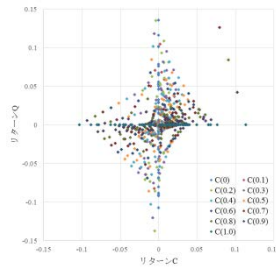
付録図 B

同時分布(散布図)による平均分散モデルの比較

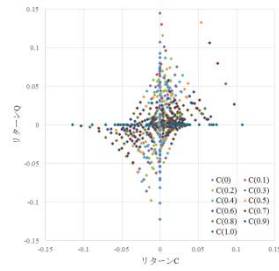
Appendix Figures B

Comparisons of mean-variance models by simultaneous distributions (scatter plot diagram)

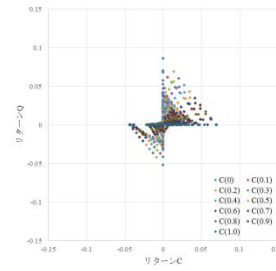




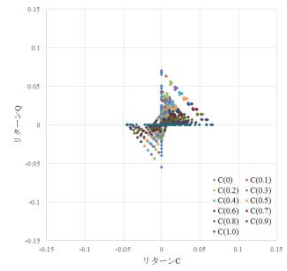
2000/1-2004/12 空売りなし



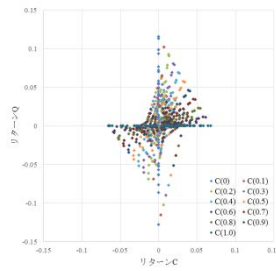
空売りあり



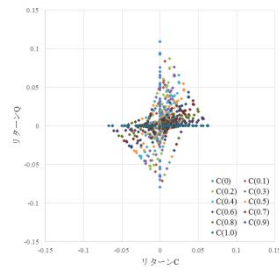
2003/1-2007/12 空売りなし



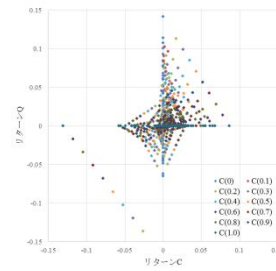
空売りあり



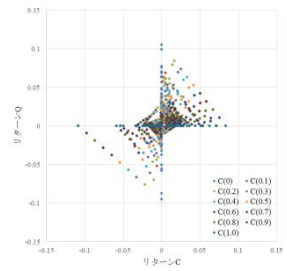
2001/1-2005/12 空売りなし



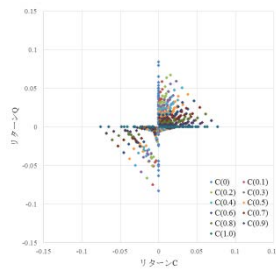
空売りあり



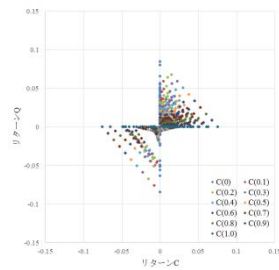
2004/1-2008/12 空売りなし



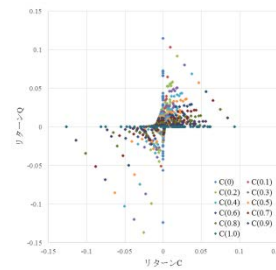
空売りあり



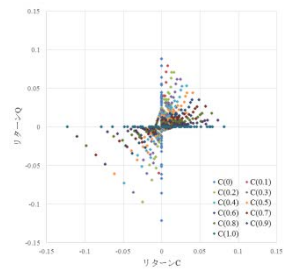
2002/1-2006/12 空売りなし



空売りあり



2005/1-2009/12 空売りなし



空売りあり